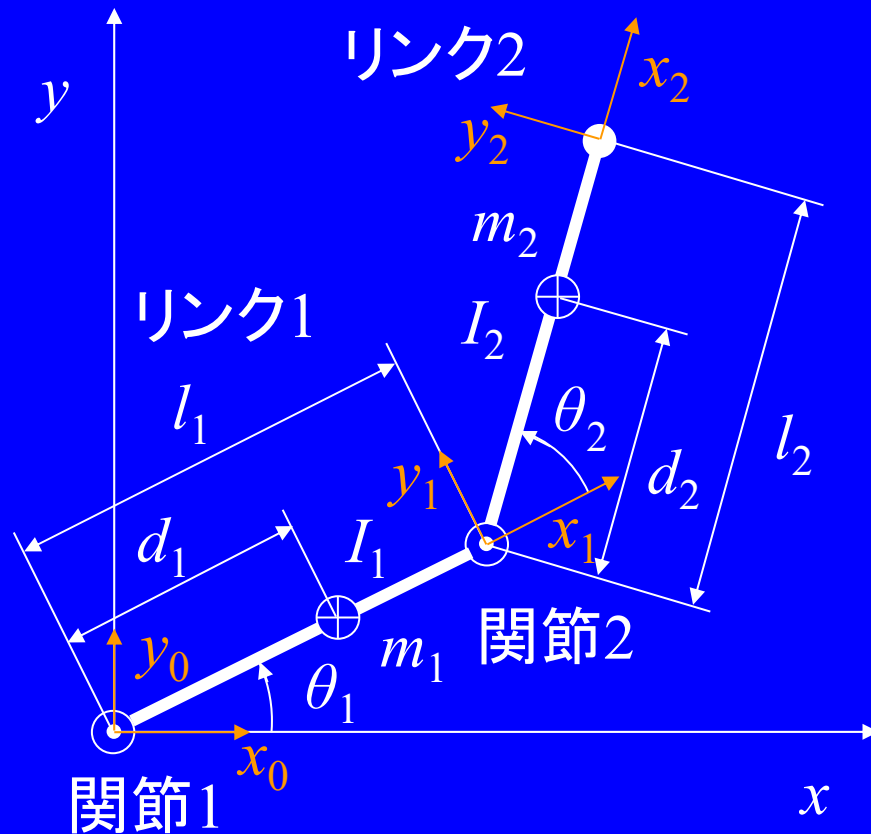


2DOF SCARA Robot



θ_i 関節 i の回転角度

m_i リンク i の質量

I_i リンク i の重心回りの慣性モーメント

l_i リンク i の長さ

d_i 関節 i からリンク i の重心までの長さ

D_i 関節 i の粘性摩擦係数

$q = [\theta_1 \ \theta_2]^T$ 関節変数

$p = [x \ y]^T$ 手先位置

DH表現リンクパラメータ $d_1 = d_2 = 0, \alpha_1 = \alpha_2 = 0, a_1 = l_1, a_2 = l_2$

順運動学

(Direct Kinematics)

座標変換

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & l_1 C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & l_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & l_1 C_1 + l_2 C_{12} \\ S_{12} & C_{12} & 0 & l_1 S_1 + l_2 S_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

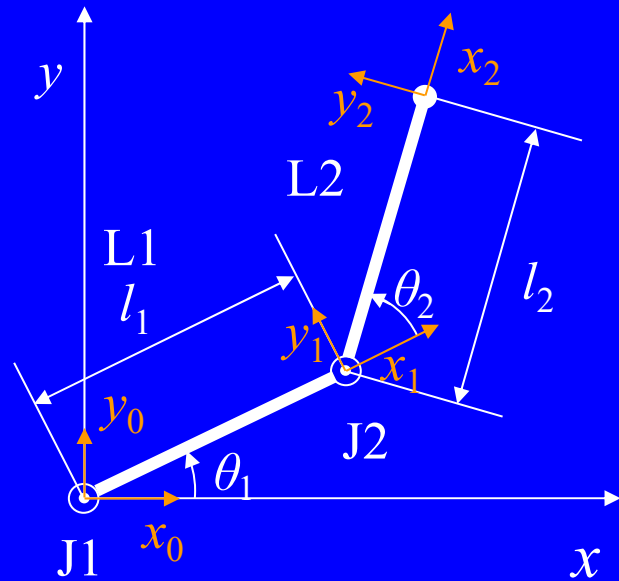
手先座標 $p = f(q)$, $\dot{p} = J(q)\dot{q}$

$$\begin{aligned} x &= l_1 C_1 + l_2 C_{12} \\ y &= l_1 S_1 + l_2 S_{12} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{ヤコビ行列} \\ J(q) = \begin{bmatrix} -l_1 S_1 - l_2 S_{12} & -l_2 S_{12} \\ l_1 C_1 + l_2 C_{12} & l_2 C_{12} \end{bmatrix} \end{array}$$

ただし, $S_1 = \sin \theta_1$, $C_1 = \cos \theta_1$, $S_2 = \sin \theta_2$, $C_2 = \cos \theta_2$
 $S_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$, $C_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$

順運動学 (詳細1)

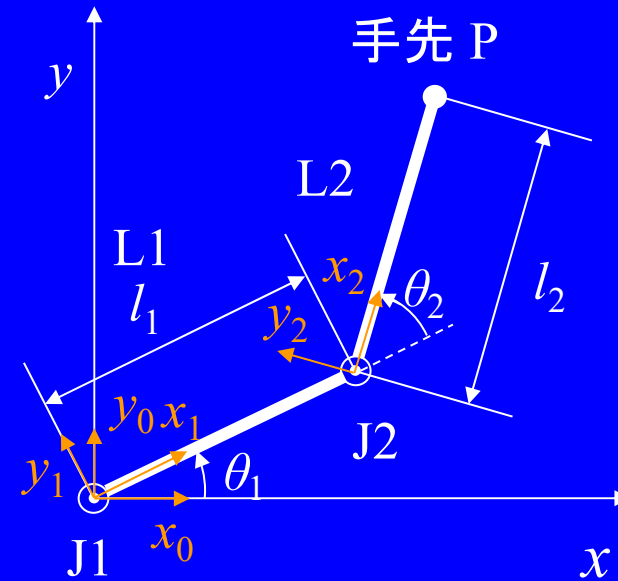
DH表現



リンクラメータ

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	0	l_1	0
2	θ_2	0	l_2	0

DH表現 (修正)



i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	0	0	0
2	θ_2	0	l_1	0

順運動学 (詳細2)

同時変換行列

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & l_i C_i \\ S_1 & C_1 & 0 & l_i S_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (i=1, 2)$$

$${}^0T_2 = {}^0T_1 {}^1T_2 = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & l_1 C_1 + l_2 C_{12} \\ S_{12} & C_{12} & 0 & l_1 S_1 + l_2 S_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

手先位置

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0T_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 C_1 + l_2 C_{12} \\ l_1 S_1 + l_2 S_{12} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & l_{i-1} \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (i=1, 2)$$

ただし, $l_0 = 0$

$${}^0T_2 = {}^0T_1 {}^1T_2 = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & l_1 C_1 \\ S_{12} & C_{12} & 0 & l_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0T_2 \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 C_1 + l_2 C_{12} \\ l_1 S_1 + l_2 S_{12} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

同じ結果

順運動学 (詳細3)

手先座標 $\mathbf{p} = f(\mathbf{q}), \dot{\mathbf{p}} = J(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 C_1 + l_2 C_{12} \\ l_1 S_1 + l_2 S_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\theta_1, \theta_2) \\ f_2(\theta_1, \theta_2) \end{bmatrix} \quad \mathbf{q} = [\theta_1 \ \theta_2]^T$$

ただし,

$$S_1 = \sin \theta_1, \quad C_1 = \cos \theta_1, \quad S_2 = \sin \theta_2, \quad C_2 = \cos \theta_2$$
$$S_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2), \quad C_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 S_1 \dot{\theta}_1 - l_2 S_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ l_1 C_1 \dot{\theta}_1 + l_2 C_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 S_1 - l_2 S_{12} & -l_2 S_{12} \\ l_1 C_1 + l_2 C_{12} & l_2 C_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

ヤコビ行列

$$J(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 S_1 - l_2 S_{12} & -l_2 S_{12} \\ l_1 C_1 + l_2 C_{12} & l_2 C_{12} \end{bmatrix}$$

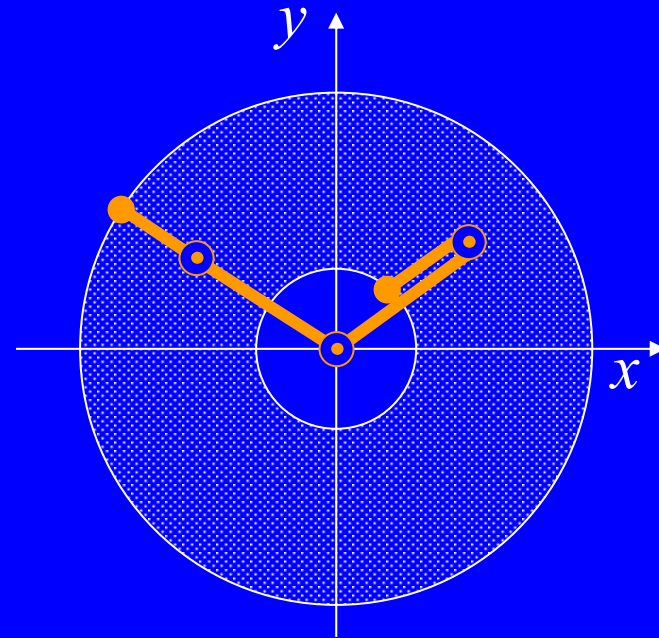
特異姿勢 (Singular Configuration)

$\text{rank } J(\mathbf{q}) < \max_q \text{rank } J(\mathbf{q})$ 望みの手先速度を出せない

$$\mathbf{p} = \mathbf{f}(\mathbf{q}), \quad \dot{\mathbf{p}} = J(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

$$J(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -l_1 S_1 - l_2 S_{12} & -l_2 S_{12} \\ l_1 C_1 + l_2 C_{12} & l_2 C_{12} \end{bmatrix}$$

$$\det J(\mathbf{q}) = l_1 l_2 S_2 = 0 \quad \therefore \theta_2 = 0, \pi$$



逆運動学

(Inverse Kinematics)

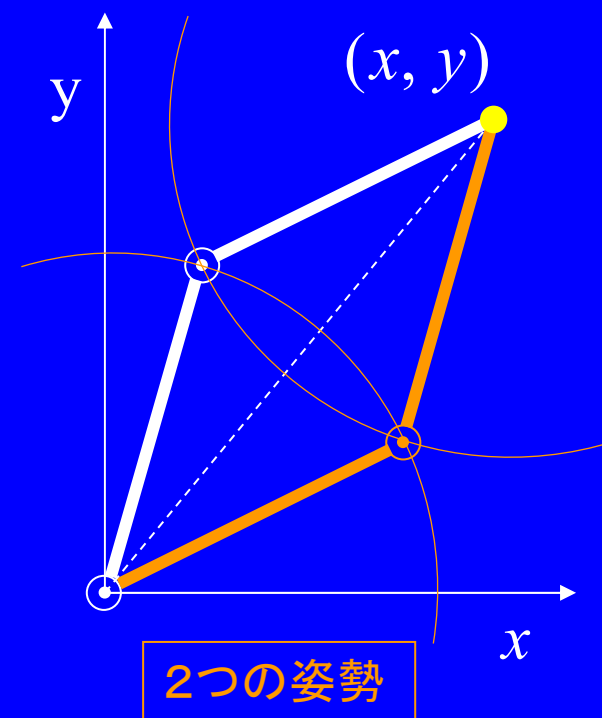
手先座標 $p = [x \ y]^T$

関節角 $q = [\theta_1 \ \theta_2]^T$

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \pm \cos^{-1}\left(\frac{l_1^2 + L^2 - l_2^2}{2l_1L}\right)$$

$$\theta_2 = \mp \left(\pi - \cos^{-1}\left(\frac{l_1^2 + l_2^2 - L^2}{2l_1l_2}\right) \right)$$

ただし, $L = \sqrt{x^2 + y^2}$



原点中心, 半径 l_1 の円と, 中心 (x, y) , 半径 l_2 の円との交点として, 求めることもできる

動力学(その1)

(Dynamics)

$$\tau = M(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) + D\dot{q} + g(q)$$

慣性行列

$$M(q) = \begin{bmatrix} 2M_{12}C_2 + m_{11} & M_{12}C_2 + m_{22} \\ M_{12}C_2 + m_{22} & m_{22} \end{bmatrix}$$

遠心力・コリオリ力

$$h(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -M_{12}S_2(\dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) \\ M_{12}S_2\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}$$

重力

$$g(q) = \begin{bmatrix} g_1C_1 + g_2C_{12} \\ g_2C_{12} \end{bmatrix}$$

粘性摩擦係数

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}$$

関節変数 $q = [\theta_1 \ \theta_2]^T$

入力トルク $\tau = [\tau_1 \ \tau_2]^T$

ただし,

$$M_{12} = m_2 l_1 d_2$$

$$m_{11} = m_1 d_1^2 + m_2 (l_1^2 + d_2^2) + I_1 + I_2$$

$$m_{22} = m_2 d_2^2 + I_2$$

$$g_1 = (m_1 d_1 + m_2 l_1)g$$

$$g_2 = m_2 d_2 g$$

動力学(その2)

(Dynamics)

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) \\
 &= \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\underline{\dot{\boldsymbol{q}}} + \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) \\
 &= \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \underline{\dot{\boldsymbol{q}}}, \ddot{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{a}
 \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \begin{bmatrix} -M_{12}S_2(\dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) \\ M_{12}S_2\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} \quad \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \begin{bmatrix} -M_{12}S_2\dot{\theta}_2 & -M_{12}S_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ M_{12}S_2\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{q}) - 2\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \text{ は歪対称行列} \quad \boldsymbol{q}^T (\dot{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{q}) - 2\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}))\boldsymbol{q} = 0$$

例

$$\boldsymbol{a} = [M_{12} \quad m_{11} \quad m_{22} \quad D_1 \quad D_2 \quad g_1 \quad g_2]^T \quad \text{パラメータ}$$

$$\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \underline{\dot{\boldsymbol{q}}}, \ddot{\boldsymbol{q}}) = \begin{bmatrix} C_2(2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) - S_2\{\dot{\theta}_2\underline{\dot{\theta}}_1 + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\underline{\dot{\theta}}_2\} & \ddot{\theta}_1 & \ddot{\theta}_2 & \dot{\theta}_1 & 0 & C_1 & C_{12} \\ C_2\ddot{\theta}_1 + S_2\dot{\theta}_1\underline{\dot{\theta}}_1 & 0 & \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 & 0 & \dot{\theta}_2 & 0 & C_{12} \end{bmatrix}$$

動力学 (LE1)

リンク重心位置

$$\mathbf{p}_{g1} = \begin{bmatrix} d_1 C_1 \\ d_1 S_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_{g2} = \begin{bmatrix} l_1 C_1 + d_2 C_{12} \\ l_1 S_1 + d_2 S_{12} \end{bmatrix}$$

ただし, $S_1 = \sin \theta_1, \quad C_1 = \cos \theta_1, \quad S_2 = \sin \theta_2, \quad C_2 = \cos \theta_2$
 $S_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2), \quad C_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$

リンク重心速度

$$\dot{\mathbf{p}}_{g1} = \begin{bmatrix} -d_1 S_1 \\ d_1 C_1 \end{bmatrix} \dot{\theta}_1, \quad \dot{\mathbf{p}}_{g2} = \begin{bmatrix} -l_1 S_1 - d_2 S_{12} \\ l_1 C_1 + d_2 C_{12} \end{bmatrix} \dot{\theta}_1 + \begin{bmatrix} -d_2 S_{12} \\ d_2 C_{12} \end{bmatrix} \dot{\theta}_2$$

リンク角速度

$$\omega_1 = \dot{\theta}_1, \quad \omega_2 = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2$$

動力学 (LE2)

運動エネルギー $K = K_1 + K_2$

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{p}}_{g1}^T \dot{\mathbf{p}}_{g1} + \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} (m_1 d_1^2 \dot{\theta}_1^2 + I_1 \dot{\theta}_1^2)$$

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{p}}_{g2}^T \dot{\mathbf{p}}_{g2} + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(m_2 \left((l_1^2 + d_2^2 + 2l_1 d_2 C_2) \dot{\theta}_1^2 + d_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2(d_2^2 + l_1 d_2 C_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \end{aligned}$$

位置エネルギー $P = P_1 + P_2$

$$P_1 = m_1 d_1 g S_1, \quad P_2 = m_2 g (l_1 S_1 + d_2 S_{12}) \quad \text{重力加速度 } g$$

ラグランジュの運動方程式 $L = K - P$ 損失なし

$$\tau_1 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial K}{\partial \theta_1} + \frac{\partial P}{\partial \theta_1}, \quad \tau_2 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial K}{\partial \theta_2} + \frac{\partial P}{\partial \theta_2}$$

動力学 (NE1)

(0) 初期値 リンク座標系表現

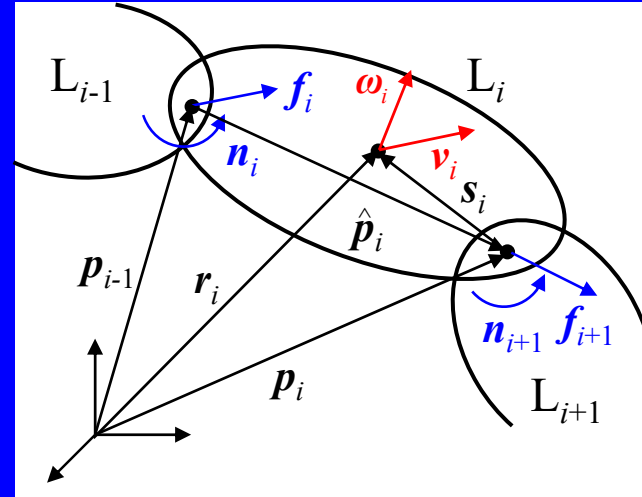
$${}^0\boldsymbol{\omega}_0 = {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 = {}^0\mathbf{v}_0 = 0, \quad {}^0\dot{\mathbf{v}}_0 = \mathbf{g} = [0, g, 0]^T$$

$${}^0R_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1R_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 \\ S_2 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1R_0 = {}^0R_1^T, \quad {}^2R_1 = {}^1R_2^T \quad \mathbf{z}_0 = [0, 0, 1]^T$$

$${}^1\hat{\mathbf{p}}_1 = [l_1, 0, 0]^T, \quad {}^2\hat{\mathbf{p}}_2 = [l_2, 0, 0]^T$$

$${}^1\mathbf{s}_1 = [d_1 - l_1, 0, 0]^T, \quad {}^2\mathbf{s}_2 = [d_2 - l_2, 0, 0]^T$$



(1) 正順計算 ($i=1,2$) $\rho_i = 1$ ($q_1 = \theta_1, q_2 = \theta_2$)

$${}^1\boldsymbol{\omega}_1 = {}^1R_0 {}^0\boldsymbol{\omega}_0 + \mathbf{z}_0 \dot{q}_1, \quad {}^1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = {}^1R_0 {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 + [\mathbf{z}_0 \ddot{q}_1 + {}^1R_0 {}^0\boldsymbol{\omega}_0 \times (\mathbf{z}_0 \dot{q}_1)]$$

$${}^1\dot{\mathbf{v}}_1 = {}^1R_0 {}^0\dot{\mathbf{v}}_0 + {}^1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times {}^1\hat{\mathbf{p}}_1 + {}^1\boldsymbol{\omega}_1 \times ({}^1\boldsymbol{\omega}_1 \times {}^1\hat{\mathbf{p}}_1), \quad {}^1\mathbf{a}_1 = {}^1\dot{\mathbf{v}}_1 + {}^1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times {}^1\mathbf{s}_1 + {}^1\boldsymbol{\omega}_1 \times ({}^1\boldsymbol{\omega}_1 \times {}^1\mathbf{s}_1)$$

$${}^2\boldsymbol{\omega}_2 = {}^2R_1 {}^1\boldsymbol{\omega}_1 + \mathbf{z}_0 \dot{q}_2, \quad {}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = {}^2R_1 {}^1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + [\mathbf{z}_0 \ddot{q}_2 + {}^2R_1 {}^1\boldsymbol{\omega}_1 \times (\mathbf{z}_0 \dot{q}_2)]$$

$${}^2\dot{\mathbf{v}}_2 = {}^2R_1 {}^1\dot{\mathbf{v}}_1 + {}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times {}^2\hat{\mathbf{p}}_2 + {}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times ({}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times {}^2\hat{\mathbf{p}}_2), \quad {}^2\mathbf{a}_2 = {}^2\dot{\mathbf{v}}_2 + {}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times {}^2\mathbf{s}_2 + {}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times ({}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times {}^2\mathbf{s}_2)$$

動力学 (NE2)

(2) 逆順計算 $(i=2,1)$

$${}^2\mathbf{f}_3 = [0, 0, 0]^T, {}^2\mathbf{n}_3 = [0, 0, 0]^T \quad : \text{外力無し}$$

$${}^2\mathbf{F}_2 = m_2 {}^2\mathbf{a}_2$$

$${}^2\mathbf{N}_2 = {}^2\mathbf{I}_2 {}^2\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 + {}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times ({}^2\mathbf{I}_2 {}^2\boldsymbol{\omega}_2)$$

$${}^2\mathbf{f}_2 = {}^2\mathbf{F}_2 + {}^2\mathbf{f}_3$$

$${}^2\mathbf{n}_2 = {}^2\mathbf{n}_3 + {}^2\hat{\mathbf{p}}_2 \times {}^2\mathbf{f}_3 + ({}^2\hat{\mathbf{p}}_2 + {}^2\mathbf{s}_2) \times {}^2\mathbf{F}_2 + {}^2\mathbf{N}_2$$

$${}^1\mathbf{F}_1 = m_1 {}^1\mathbf{a}_1$$

$${}^1\mathbf{N}_1 = {}^1\mathbf{I}_1 {}^1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + {}^1\boldsymbol{\omega}_1 \times ({}^1\mathbf{I}_1 {}^1\boldsymbol{\omega}_1)$$

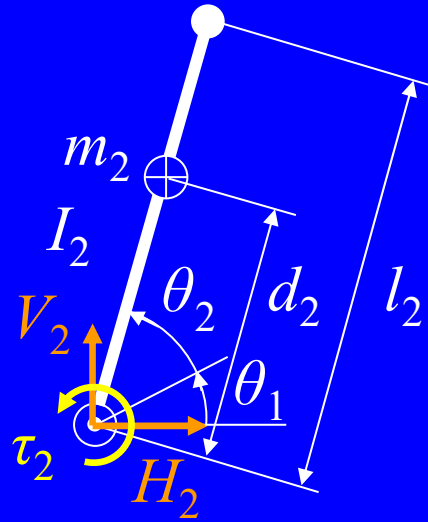
$${}^1\mathbf{f}_1 = {}^1\mathbf{F}_1 + {}^1\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{f}_2$$

$${}^1\mathbf{n}_1 = {}^1\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{n}_2 + {}^1\hat{\mathbf{p}}_1 \times {}^1\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{f}_2 + ({}^1\hat{\mathbf{p}}_1 + {}^1\mathbf{s}_1) \times {}^1\mathbf{F}_1 + {}^1\mathbf{N}_1$$

$$\boldsymbol{\tau}_2 = {}^2\mathbf{n}_2^T \mathbf{z}_0 + D_2 \dot{q}_2$$

$$\boldsymbol{\tau}_1 = {}^1\mathbf{n}_1^T \mathbf{z}_0 + D_1 \dot{q}_1$$

動力学 (NE補)



重心位置

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 C_1 \\ d_1 S_1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 C_1 + d_2 C_{12} \\ l_1 S_1 + d_2 S_{12} \end{bmatrix}$$

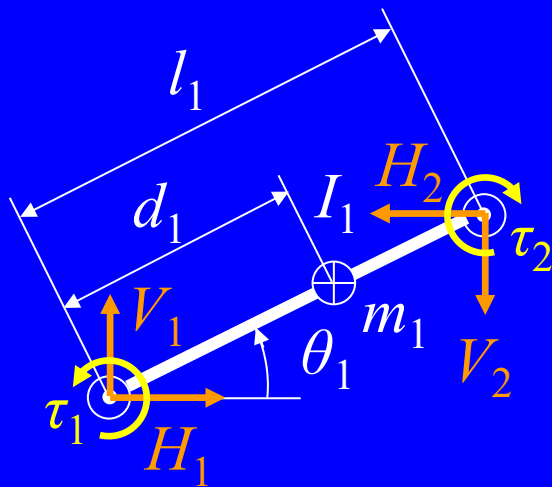
並進

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= H_1 - H_2, & m_1 \ddot{y}_1 &= V_1 - V_2 - m_1 g \\ m_2 \ddot{x}_2 &= H_2, & m_2 \ddot{y}_2 &= V_2 - m_2 g \end{aligned}$$

回転

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\theta}_1 &= -\{V_1 d_1 + V_2 (l_1 - d_1)\} C_1 + \{H_1 d_1 + H_2 (l_1 - d_1)\} S_1 \\ &\quad + \tau_1 - \tau_2 - D_1 \dot{\theta}_1 + D_2 \dot{\theta}_2 \\ I_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) &= -V_2 d_2 C_{12} + H_2 d_2 S_{12} + \tau_2 - D_2 \dot{\theta}_2 \end{aligned}$$

上式から H_1, V_1, H_2, V_2 を消去



同定 (逐次同定)

(Identification)

(1) 静止試験..一定トルクを与え, 重力と釣合せ, 静止させる

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 C_1 + g_2 C_{12} \\ g_2 C_{12} \end{bmatrix}$$

(2) 運動試験..各関節を固定し, 各軸単独で重力補償 + 入力 $\bar{\tau}$ を与える (q, \dot{q}, \ddot{q} が測定可なら, 最小2乗法などを用いる)

(a) 関節1を固定

$$\bar{\tau}_2 = m_{22} \ddot{\theta}_2 + D_2 \dot{\theta}_2$$

(b) 関節2を 0° で固定

$$\bar{\tau}_1 = (2M_{12} + m_{11}) \ddot{\theta}_1 + D_1 \dot{\theta}_1$$

(c) 関節2を 90° で固定

$$\bar{\tau}_1 = m_{11} \ddot{\theta}_1 + D_1 \dot{\theta}_1$$

等角速度運動を行わせ,
粘性摩擦係を求めた後,
角加速度運動を行わせ,
慣性行列の係数を求める
方法などもある

同定(逐次同定1)

(1) 静止試験..一定トルクを与え,重力と釣合せ,静止させる

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 C_1 + g_2 C_{12} \\ g_2 C_{12} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})$$

静止 $\ddot{\boldsymbol{q}} = \dot{\boldsymbol{q}} = 0$, \boldsymbol{q} を測定

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \begin{bmatrix} -M_{12}S_2(\dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) \\ M_{12}S_2\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}$$

$$\therefore \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} g_1 C_1 + g_2 C_{12} \\ g_2 C_{12} \end{bmatrix}$$

同定(逐次同定2)

(2) 運動試験..各関節を固定し,各軸単独で(1)で推定した重力補償+入力 $\bar{\tau}$ を与える

$$\begin{bmatrix} 2M_{12}C_2 + m_{11} & M_{12}C_2 + m_{22} \\ M_{12}C_2 + m_{22} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -M_{12}S_2(\dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) \\ M_{12}S_2\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \mathbf{g}(q) = \bar{\tau} + \mathbf{g}(q)$$

(a) 関節1を固定(第2式のみで, $\ddot{\theta}_1 = \dot{\theta}_1 = 0$)

$$\bar{\tau}_2 = m_{22}\ddot{\theta}_2 + D_2\dot{\theta}_2$$

(b) 関節2を 0° で固定(第1式のみで, $\ddot{\theta}_2 = \dot{\theta}_2 = \theta_2 = 0$)

$$\bar{\tau}_1 = (2M_{12} + m_{11})\ddot{\theta}_1 + D_1\dot{\theta}_1$$

(c) 関節2を 90° で固定(第1式のみで, $\ddot{\theta}_2 = \dot{\theta}_2 = 0, \theta_2 = \pi/2$)

$$\bar{\tau}_1 = m_{11}\ddot{\theta}_1 + D_1\dot{\theta}_1$$

等角速度運動と角加速度運動, 最小2乗法など

同定(同時同定)

(Identification)

運動方程式 $\tau = \zeta(q, \dot{q}, \underline{\dot{q}}, \ddot{q})a$

パラメータ $a = [M_{12} \ m_{11} \ m_{22} \ D_1 \ D_2 \ g_1 \ g_2]^T$ に関して線形

$$\zeta(q, \dot{q}, \underline{\dot{q}}, \ddot{q}) = \begin{bmatrix} C_2(2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) - S_2\{\dot{\theta}_2 \underline{\dot{\theta}}_1 + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \underline{\dot{\theta}}_2\} & \ddot{\theta}_1 & \ddot{\theta}_2 & \dot{\theta}_1 & 0 & C_1 & C_{12} \\ C_2\ddot{\theta}_1 + S_2\dot{\theta}_1 \underline{\dot{\theta}}_1 & 0 & \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 & 0 & \dot{\theta}_2 & 0 & C_{12} \end{bmatrix}$$

q, \dot{q}, \ddot{q} が測定可なら, いくつかの時刻で測定を行い, 最小2乗法などを用いて一挙に推定

$$\hat{a} = (A^T A)^{-1} A^T y \quad \text{ここで} \quad A = \begin{bmatrix} \zeta(q(t_1), \dot{q}(t_1), \underline{\dot{q}}(t_1), \ddot{q}(t_1)) \\ \vdots \\ \zeta(q(t_n), \dot{q}(t_n), \underline{\dot{q}}(t_n), \ddot{q}(t_n)) \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} \tau(t_1) \\ \vdots \\ \tau(t_n) \end{bmatrix}$$

重力補償+PDフィードバック (Gravity Compensation & PD Control)

関節角PTP制御

制御則

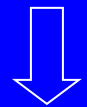
$$\tau = -K_p(q - q_d) - K_d\dot{q} + g(q)$$

K_p, K_d 正定対角行列

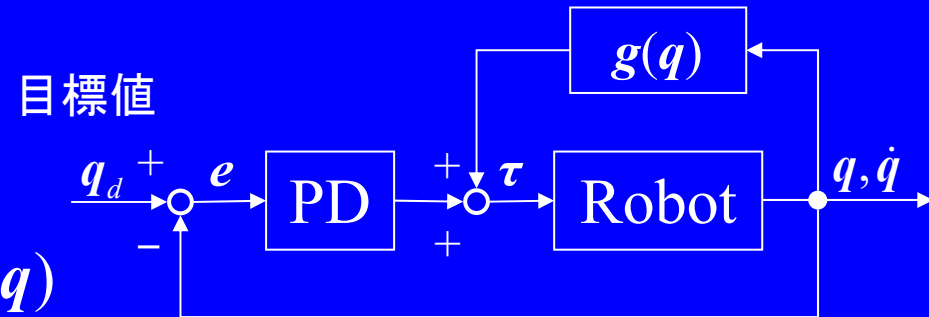
安定性

$$V(t) = \frac{1}{2} \{ \dot{q}^T M(q) \dot{q} + (q - q_d)^T K_p (q - q_d) \} > 0$$

$$\dot{V}(t) = -\dot{q}^T (K_d + D) \dot{q} \leq 0 \quad \text{また、} \dot{q} = 0 \text{ の時のみ } \dot{V}(t) = 0$$



平衡点 $(q_d, 0)$ は漸近安定



(補) 状態方程式と安定性

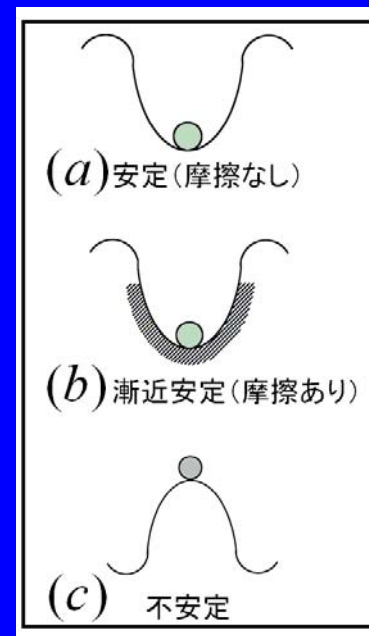
非線形システム

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad x \in R^n$$

ただし, $f(x) = 0$ を満足する平衡点は原点 $x = 0$

安定性とは？

$x(0)$ が原点(平衡点)から少しずれたとき, $x(t)$ が依然として原点近傍に留まり得るか否か



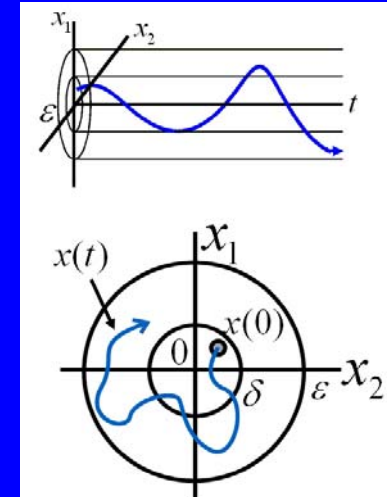
(補)リアプノフ安定性

リアプノフ安定性

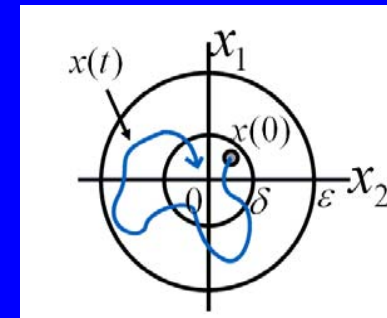
システム $\dot{x}(t) = f(x(t))$ の原点近傍において任意の ε ($0 < \varepsilon$) に対して, ある $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在して, 初期条件 $\|x(0)\| < \delta(\varepsilon)$ を満足するすべての $x(0)$ と, $t \geq 0$ について $\|x(t)\| < \varepsilon$ となるとき, 原点 $x = 0$ はリアプノフ安定

漸近安定性

安定 かつ $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$ となるとき, 原点 $x = 0$ は漸近安定



(a) リアプノフ安定



(b) 漸近安定

(補) 正定関数と正定行列

正定・準正定・負定・準負定関数

正定関数 : $V(0) = 0$ かつ $V(x) > 0$ for $\forall x \neq 0$
準正定関数 : $V(0) = 0$ かつ $V(x) \geq 0$ for $\forall x \neq 0$
負定関数 : $V(0) = 0$ かつ $-V(x) > 0$ for $\forall x \neq 0$
準負定関数 : $V(0) = 0$ かつ $-V(x) \geq 0$ for $\forall x \neq 0$

$x \in R^n$
ベクトル
 $V(x) \in R$
スカラー関数

正定・準正定・負定・準負定行列

$A > 0$ (A : 正定) : $x^T Ax > 0$ for $\forall x \neq 0$
 $A \geq 0$ (A : 準正定) : $x^T Ax \geq 0$ for $\forall x \neq 0$
 $A < 0$ (A : 負定) : $x^T Ax < 0$ for $\forall x \neq 0$
 $A \leq 0$ (A : 準負定) : $x^T Ax \leq 0$ for $\forall x \neq 0$

$A \in R^{n \times n}$
正方行列
 $x^T Ax$
2次形式

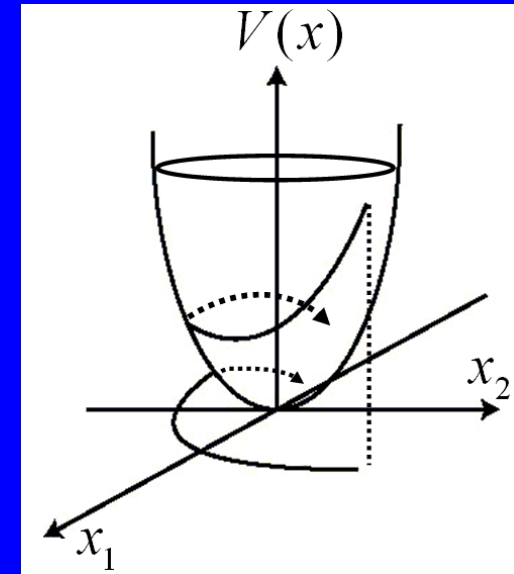
固有値の正, 負

(補) Liapunovの安定判別

リアプノフ関数

$\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ が連続であり, ベクトル $\mathbf{x}(t)$ について恒等的に $V(\mathbf{x}) > 0$ となり, かつ, システムにそっての時間微分が $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ となるスカラー関数 $V(\mathbf{x})$

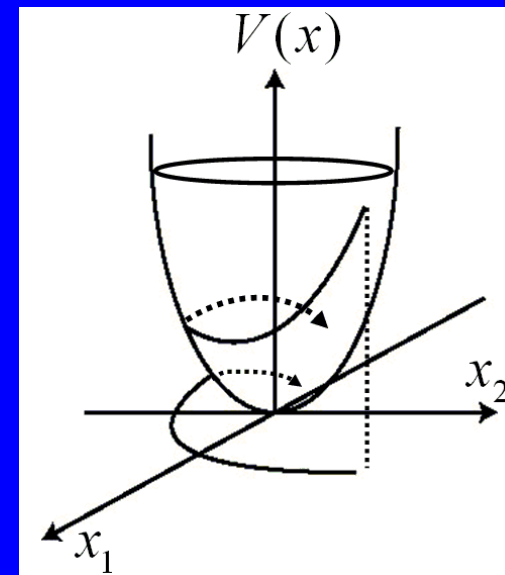
$$\begin{aligned}\dot{V} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \dot{\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq 0\end{aligned}$$



(補) Liapunovの安定判別

リアプノフ関数

$\frac{\partial V(x)}{\partial x}$ が連続であり, ベクトル $x(t)$ について恒等的に $V(x) > 0$ となり, かつ, システムにそっての時間微分が $\dot{V}(x) \leq 0$ となるスカラー関数 $V(x)$



非線形システム $\dot{x}(t) = f(x(t))$ の平衡点 $x = 0$

リアプノフ関数が存在 \implies リアプノフ安定

リアプノフ関数が存在して, $\dot{V}(x) < 0 \implies$ 漸近安定

重力補償+PDフィードバック

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + D\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (1) \quad \mathbf{q}_d \quad \text{一定値}$$

$$\boldsymbol{\tau} = -K_p(\mathbf{q} - \mathbf{q}_d) - K_d\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (2) \quad K_p, K_d \quad \text{正定対角行列}$$

リアプノフ関数候補

$$V(t) = \frac{1}{2} \left\{ \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{q} - \mathbf{q}_d)^T K_p (\mathbf{q} - \mathbf{q}_d) \right\} > 0 \quad M(\mathbf{q}) \text{ は正定対称行列}$$

$$\dot{V}(t) = \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T K_p (\mathbf{q} - \mathbf{q}_d) \quad \text{式(1), (2) を代入}$$

$$= \dot{\mathbf{q}}^T \left\{ -\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - D\dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - K_d \dot{\mathbf{q}} \right\} \quad \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}$$

$$= \dot{\mathbf{q}}^T \left\{ -C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - (K_d + D) \dot{\mathbf{q}} \right\} \quad \dot{M} - 2C \text{ は歪対称行列}$$

$$= \dot{\mathbf{q}}^T \left\{ -C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \frac{1}{2} \dot{M}(\mathbf{q}) - (K_d + D) \right\} \dot{\mathbf{q}} \quad \mathbf{x}^T (\dot{M} - 2C) \mathbf{x} = 0, \forall \mathbf{x}$$

$$= -\dot{\mathbf{q}}^T (K_d + D) \dot{\mathbf{q}} \leq 0 \quad \text{また、} \dot{\mathbf{q}} = 0 \text{ の時のみ } \dot{V}(t) = 0$$

⇒ 平衡点 $(\mathbf{q}_d, 0)$ は漸近安定

(補) 平衡点近傍での線形化

非線形システム

$$\dot{x} = f(x, u, t)$$

$$y = g(x, u, t)$$

状態変数ベクトル $x \in R^n$

入力ベクトル $u \in R^r$

出力ベクトル $y \in R^m$

平衡点 x_0 の近傍で線形化した状態方程式

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \in R^{n \times n}, \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \in R^{n \times r}$$

$$C = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \in R^{m \times n}, \quad D = \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \in R^{m \times r}$$

伝達関数行列

$$G(s) = C(sI + A)^{-1}B + D \in R^{m \times r}$$

平衡点近傍での線形化 (Linearization)

平衡点 $q_0 = [\theta_{10} \quad \theta_{20}]^T$ の近傍で線形化

$$x = [\Delta\theta_1 \quad \Delta\theta_2 \quad \Delta\dot{\theta}_1 \quad \Delta\dot{\theta}_2]^T, \quad u = [\Delta\tau_1 \quad \Delta\tau_2]^T$$

状態方程式

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ -J^{-1}K & -J^{-1}D \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ J^{-1} \end{bmatrix} \quad J = M(q_0), \quad I_2 \text{ は } 2 \times 2 \text{ 単位行列}$$

慣性行列の変動は無視

$$K = - \begin{bmatrix} m_1 g d_1 \sin \theta_{10} + m_2 g \{ l_1 \sin \theta_{10} + d_2 \sin(\theta_{10} + \theta_{20}) \} & m_2 g d_2 \sin(\theta_{10} + \theta_{20}) \\ m_2 g d_2 \sin(\theta_{10} + \theta_{20}) & m_2 g d_2 \sin(\theta_{10} + \theta_{20}) \end{bmatrix}$$

ただし、重力項が無い場合 ($g(q) = 0$) や重力補償した場合は $K = 0$

状態フィードバック (State Feedback)

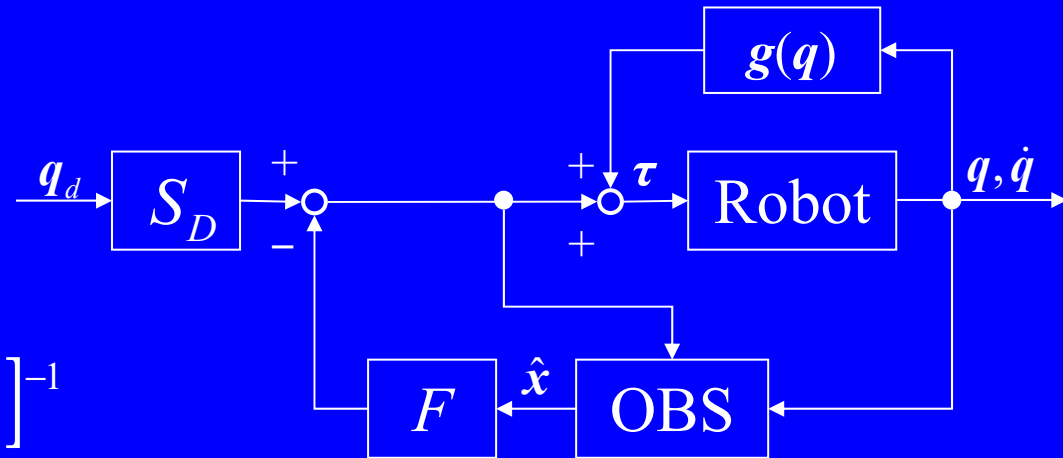
制御則

$$\tau = S_D \mathbf{q}_d - F \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

$$S_D = [C(-A + BF)^{-1} B]^{-1}$$

F : 状態フィードバックゲイン

状態が全て得られるならばオブザーバ(OBS)は必要ない



動的補償(FF)

(Inverse Dynamics Method)

関節角追従制御

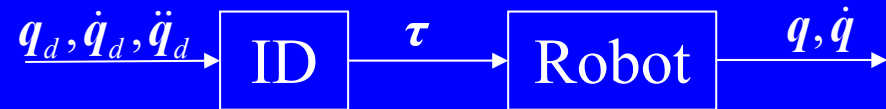
制御則

$$\tau = \hat{\tau}(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d)$$

$$\hat{\tau}(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \hat{M}(q)\ddot{q} + \hat{h}(q, \dot{q}) + \hat{D}\dot{q} + \hat{g}(q)$$

ID: 逆動力学モデル
 (“^”は推定値を表す)

目標軌道



誤差 $e = q - q_d$

$$M(q)\ddot{e} + D\dot{e} = \varepsilon_{ff}$$

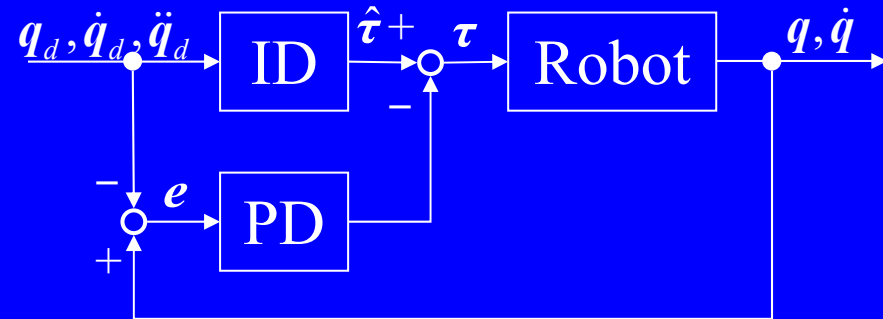
ε_{ff} パラメータ誤差、軌道誤差など

動的補償(FF)+PDフィードバック (Inverse Dynamics & PD Control)

制御則

$$\tau = \hat{\tau}(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) - K_p e - K_d \dot{e}$$

$$e = q - q_d$$



誤差

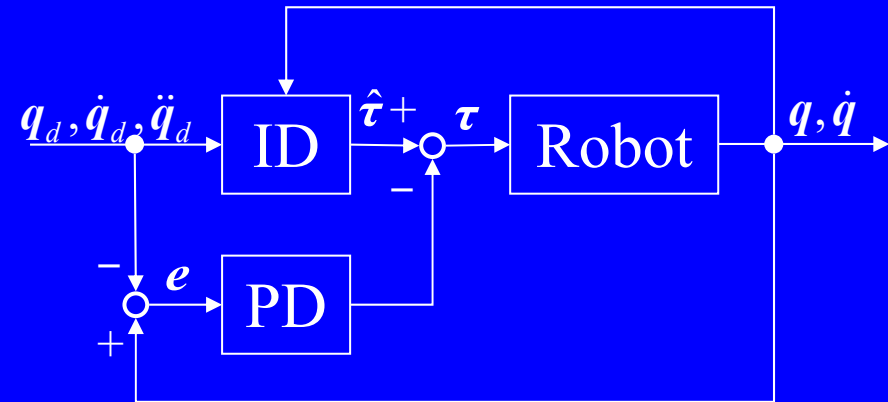
$$M(q)\ddot{e} + (K_d + D)\dot{e} + K_p e = \varepsilon_{fc}$$

動的補償(FB)+PDフィードバック (Inverse Dynamics & PD Control)

制御則

$$\tau = \hat{\tau}(q, \dot{q}, \ddot{q}_d) - K_p e - K_d \dot{e}$$

$$e = q - q_d$$



誤差

$$M(q)\ddot{e} + K_d \dot{e} + K_p e = \varepsilon_{bc}$$

計算トルク法 (Computed Torque Method)

制御則

$$\tau = \hat{\tau}(q, \dot{q}, \ddot{q}_a)$$

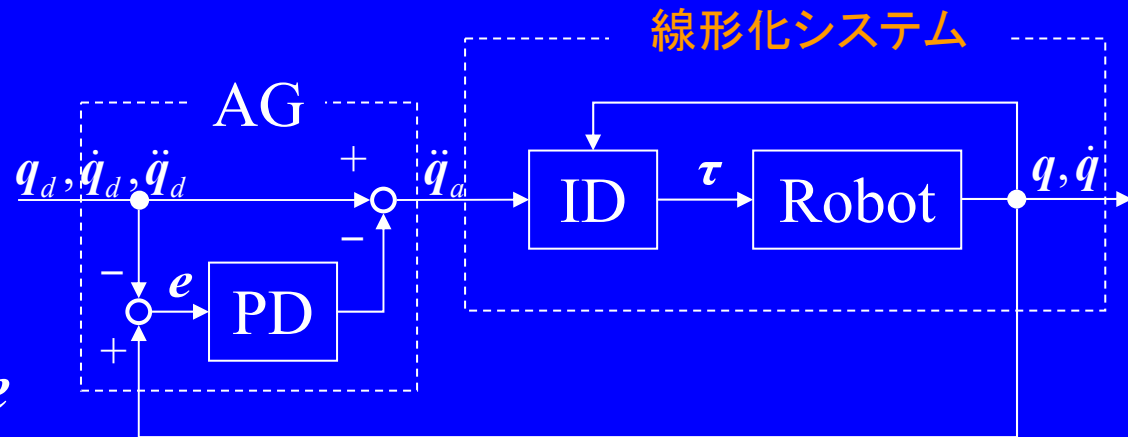
$$\ddot{q}_a = \ddot{q}_d - K_d \dot{e} - K_p e$$

$$e = q - q_d$$

誤差

$$M(q)(\ddot{e} + K_d \dot{e} + K_p e) = \varepsilon_{ct}$$

$$\therefore \ddot{e} + K_d \dot{e} + K_p e = \bar{\varepsilon}_{ct}$$

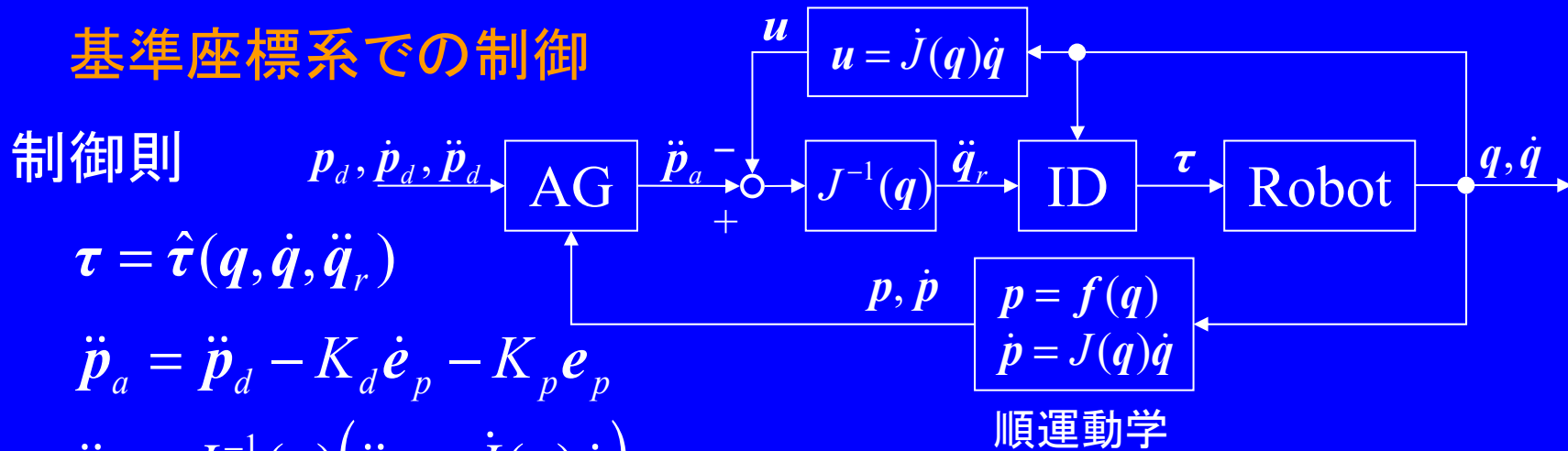


フィードバックによる線形化
とサーボ補償

分解加速度制御

(Resolved Acceleration Control)

基準座標系での制御



$$\tau = \hat{\tau}(q, \dot{q}, \ddot{q}_r)$$

$$\ddot{p}_a = \ddot{p}_d - K_d \dot{e}_p - K_p e_p$$

$$\ddot{q}_r = J^{-1}(q)(\ddot{p}_a - \dot{J}(q)\dot{q})$$

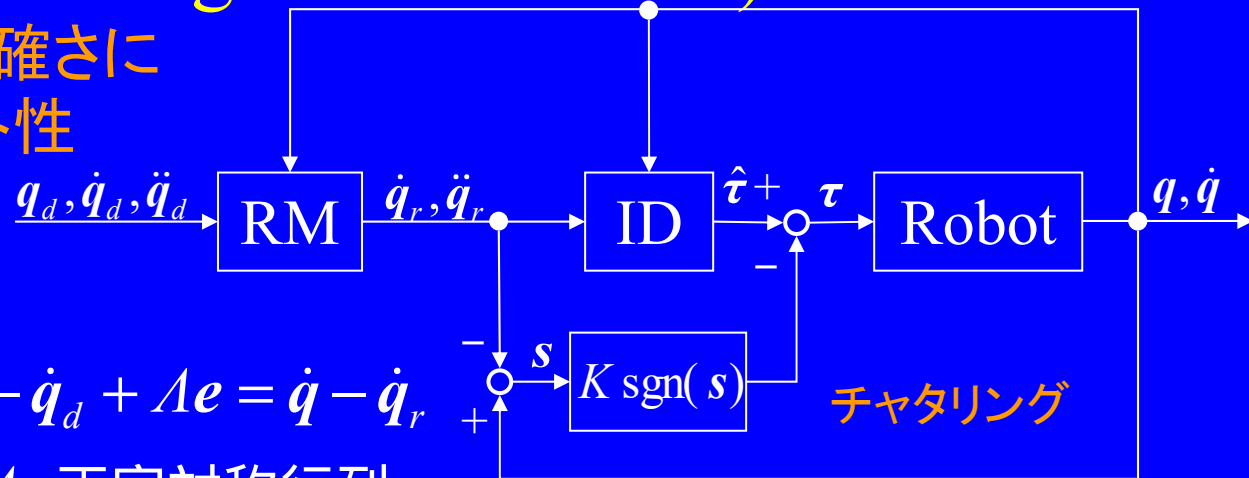
誤差 $e_p = p - p_d$

$$\ddot{e}_p + K_d \dot{e}_p + K_p e_p = \varepsilon_{ra}$$

スライディングモード制御 (Sliding Mode Control)

モデルの不正確さに
対するロバスト性

制御則



$$e = q - q_d$$

$$s = \dot{e} + \Lambda e = \dot{q} - \dot{q}_d + \Lambda e = \dot{q} - \dot{q}_r$$

$$\dot{q}_r = \dot{q}_d - \Lambda e, \Lambda: \text{正定対称行列}$$

$$\tau = \hat{\tau} - K \operatorname{sgn}(s), \operatorname{sgn}(s): \text{符号関数}, K = \operatorname{diag}(K_i) \quad (\text{VSSの一種})$$

$$\hat{\tau} = \hat{M}(q)\ddot{q}_r + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q}_r + \hat{D}\dot{q} + \hat{g}(q) = \zeta(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)$$

$$V(t) = \frac{1}{2} s^T M(q) s, \quad \dot{V}(t) = s^T \left(\tilde{M}(q)\ddot{q}_r + \tilde{C}(q, \dot{q})\dot{q}_r + \tilde{D}\dot{q} + \tilde{g}(q) \right) - \sum_{i=1}^n K_i |s_i|$$

$$K_i \geq \left| \left[\tilde{M}(q)\ddot{q}_r + \tilde{C}(q, \dot{q})\dot{q}_r + \tilde{D}\dot{q} + \tilde{g}(q) \right]_i \right| + \eta_i, \quad \eta_i > 0 \text{ ととれば } \dot{V}(t) \leq - \sum_{i=1}^n \eta_i |s_i|$$

$$\text{ただし、} \tilde{M} = \hat{M} - M, \tilde{C} = \hat{C} - C, \tilde{D} = \hat{D} - D, \tilde{g} = \hat{g} - g$$

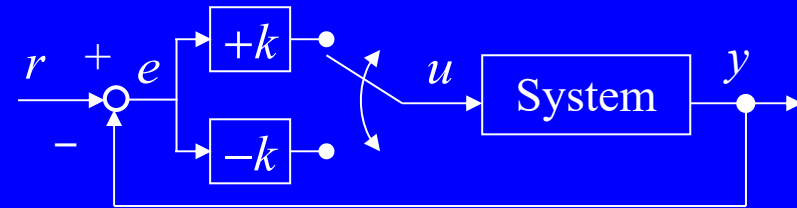
(補)スライディングモード制御

2次系の例

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = ax_2 + u, \quad a > 0$$

$$u = -\phi x_1 \quad k > 0$$

$$\phi = \begin{cases} +k & \sigma(x_1, x_2) > 0 \\ -k & \sigma(x_1, x_2) < 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} \sigma(x_1, x_2) &= x_1 S \\ S &= \alpha x_1 + x_2 \end{aligned}$$

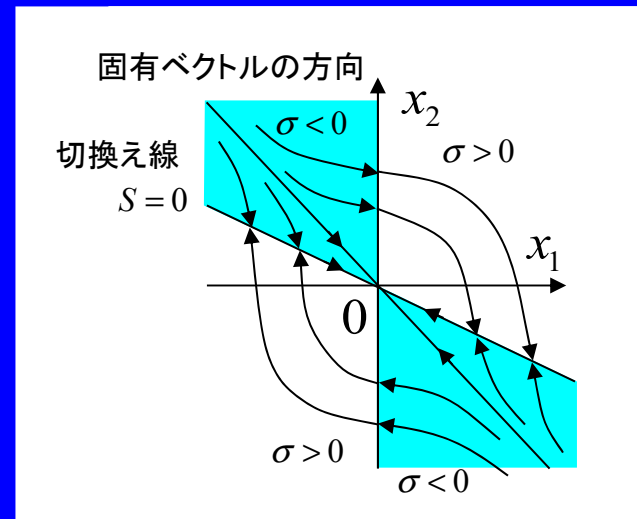


領域I: $\sigma > 0$ 不安定渦状点

領域II: $\sigma < 0$ 固有ベクトル方向のみ安定な鞍形点

ともに不安定であるが、ゲインの切り替えにより安定

切換え線 $S=0$ の傾きが小さいと、切替え線に到達した状態は、この直線上に拘束されて、原点へ向かう

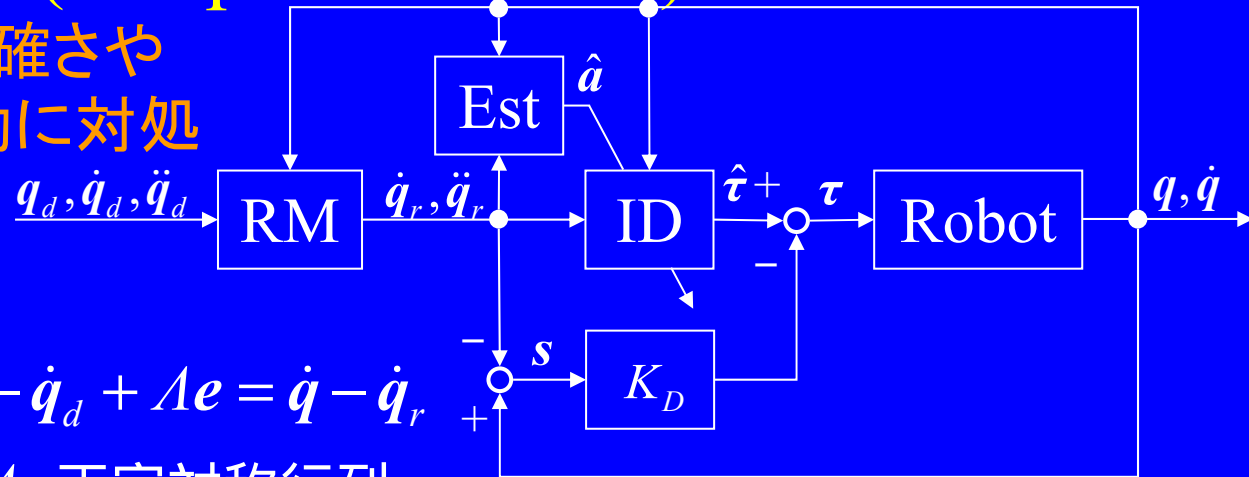


位相面軌道

適応制御

(Adaptive Control)

モデルの不正確さや
パラメータ変動に対処
制御則



$$e = q - q_d$$

$$s = \dot{e} + \Lambda e = \dot{q} - \dot{q}_d + \Lambda e = \dot{q} - \dot{q}_r$$

$$\dot{q}_r = \dot{q}_d - \Lambda e, \Lambda: \text{正定対称行列}$$

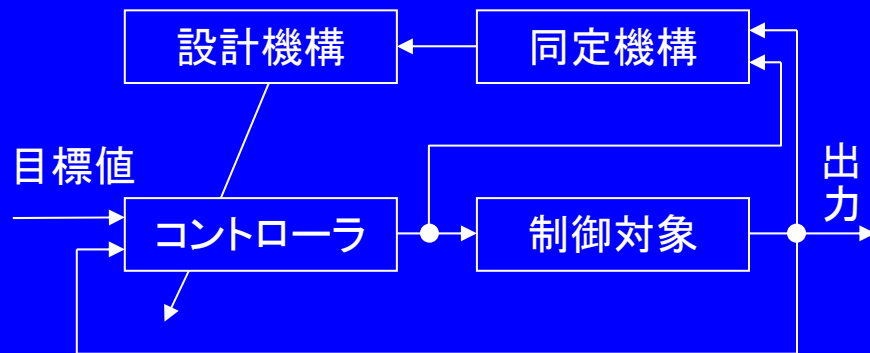
$$\tau = \hat{\tau} - K_D s, K_D: \text{正定対称行列}$$

$$\hat{\tau} = \hat{M}(q)\ddot{q}_r + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q}_r + \hat{D}\dot{q} + \hat{g}(q) = \zeta(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)\hat{a}$$

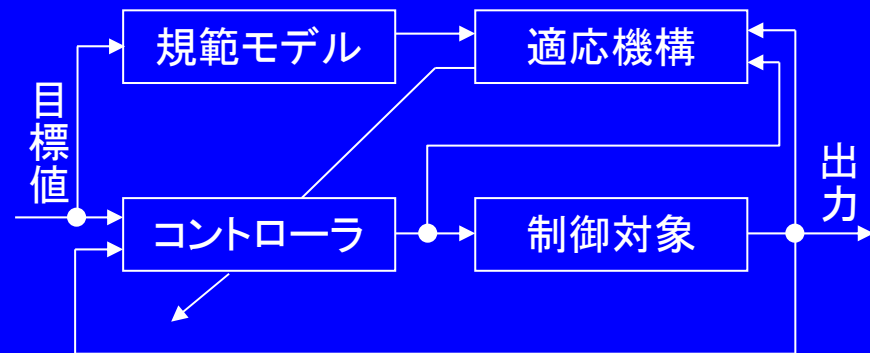
調整則 $\dot{\hat{a}} = -\Gamma \zeta^T(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)s$, $\Gamma: \text{正定対称行列}$ オンライン推定

$$V(t) = \frac{1}{2} (s^T M(q)s + \tilde{a}^T \Gamma^{-1} \tilde{a}), \quad \dot{V}(t) = -s^T K_D s \leq 0 \quad \text{ただし、} \tilde{a} = \hat{a} - a$$

(補) 適応制御



セルフチューニング
コントローラ



モデル規範型
適応制御