

ロボット工学

Robotics

ロボットの定義 (ISO)

- ・国際標準規格 (ISO)

産業用ロボットは、自動制御によるマニピュレーション機能や移動機能をもち、いろいろな作業がプログラムされ実行される機械

ロボットの定義 (JIS B0134)

・産業用ロボット

自動制御によるマニピュレーション機能または移動機能を持ち、各種の作業をプログラムにより実行でき、産業に使用される機械

・マニピュレータ

互いに連結された分節で構成し、対象物(部品、工具など)をつかむ、または動かすことを目的とした機械

・移動ロボット

自動的に移動できるベースを持つロボット

ロボットの用語 (JIS B0134-2015)

- ・ロボット

二つ以上の軸についてプログラムによって動作し、ある程度の自律性をもち、環境内で動作して所期の作業を実行する運動機構。

- ・産業用ロボット

- ・サービスロボット

- ・移動ロボット

- ・マニピュレータ

ロボットの分類（一般1）

- 遠隔操縦ロボット

オペレータが遠隔の場所から操縦することができるロボット

- シーケンスロボット

機械の動作状態が、設定した順序・条件に従って進み、一つの状態の終了が次の状態を生成するような制御システムをもつロボット

- プレイバックロボット

教示プログラミングによって記憶したタスクプログラムを、繰り返し実行することができるロボット

ロボットの分類（一般2）

- **数値制御ロボット**

ロボットを動かすことなく順序・条件・位置・その他の情報を数値，言語などによって教示し，その情報に従って作業を行えるロボット

- **感覚制御ロボット**

センサ情報を用いて動作の制御を行うロボット

- **知能ロボット**

人工知能によって行動を決定できるロボット

ロボットシステム

- (a) 機構構造部・・・アーム, 移動機構など
- (b) 動力源および制御装置
- (c) エンドエフェクタ(手先効果器)・・・ハンドなど
- (d) ロボットの作業遂行に必要な装置, 機器及びセンサ・・・内界センサ, 外界センサ
- (e) ロボット, 装置, センサなどを運転し監視するための通信インタフェース

リンクと関節

- **対偶**

二つの要素が接触して、相対運動を行うもの

- **リンク**

一つの機械構造を構成する、互いに相対運動可能な個体要素

- **ジョイント, 関節**

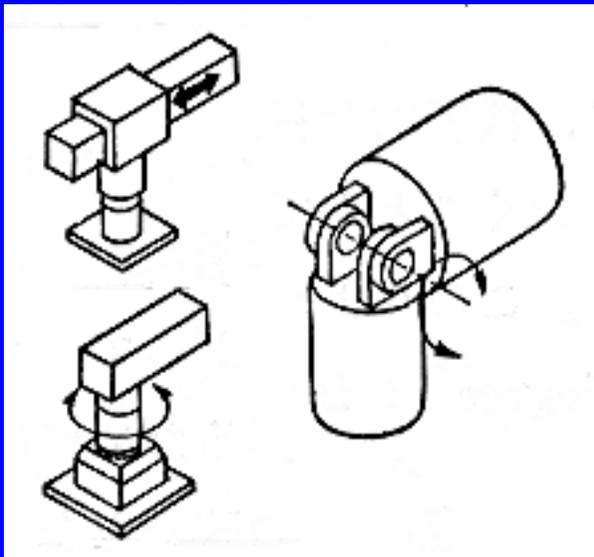
二つのリンクが互いに接触して相対的に運動するときの連結部分

- **エンドエフェクタ**

ロボットが作業対象に直接働きかける機構を持つ部分

いろいろな関節

- **能動関節**
アクチュエータで動作
- **受動関節**
駆動力を発生できない



直動 ジョイント	
回転 ジョイント	
円筒ジョイント	
球ジョイント	
エンドエフェクタ	

JIS B0138-1996

自由度

・自由度

空間において剛体の運動を記述するのに必要な独立変数の数

運動の融通度を示す尺度

全体の自由度 F

要素の数 n

自由度 i の対偶の数 f_i

3次元空間 $K=6$

平面 $K=3$

$$F = K(n-1) - \sum_{i=1}^{K-1} (K-i)f_i$$

物体の運動

3次元空間における無拘束の物体

- **並進運動**

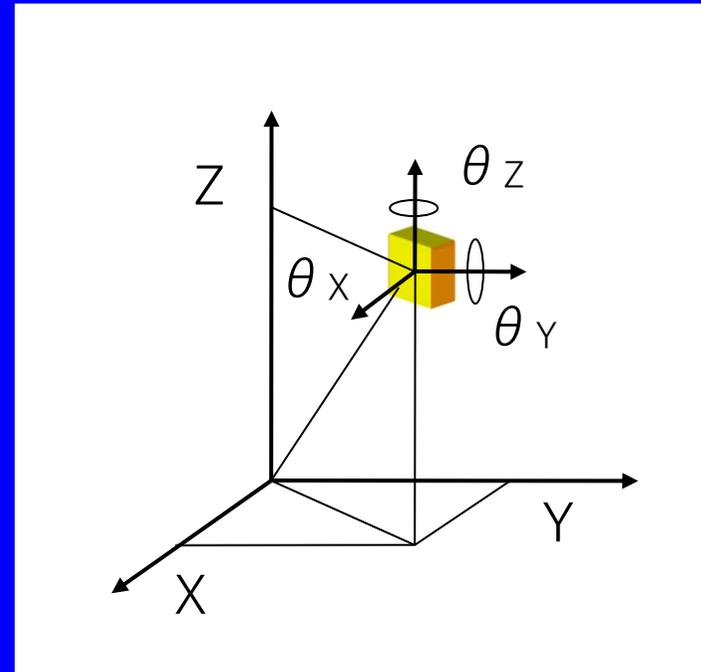
X, Y, Z各軸方向の運動
位置に関する自由度=3

- **回転運動**

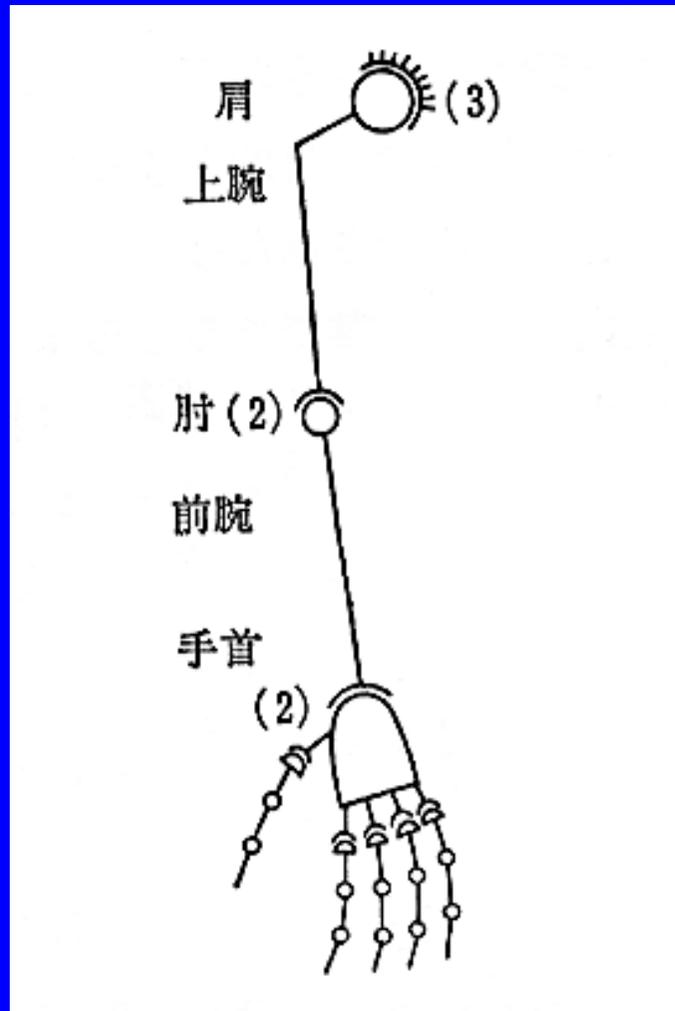
X, Y, Z各軸周りの運動
姿勢に関する自由度=3



物体の位置・姿勢の任意操作には
最低**6自由度**



人の腕



自由度

肩	3
肘	2
手首	2
計	7

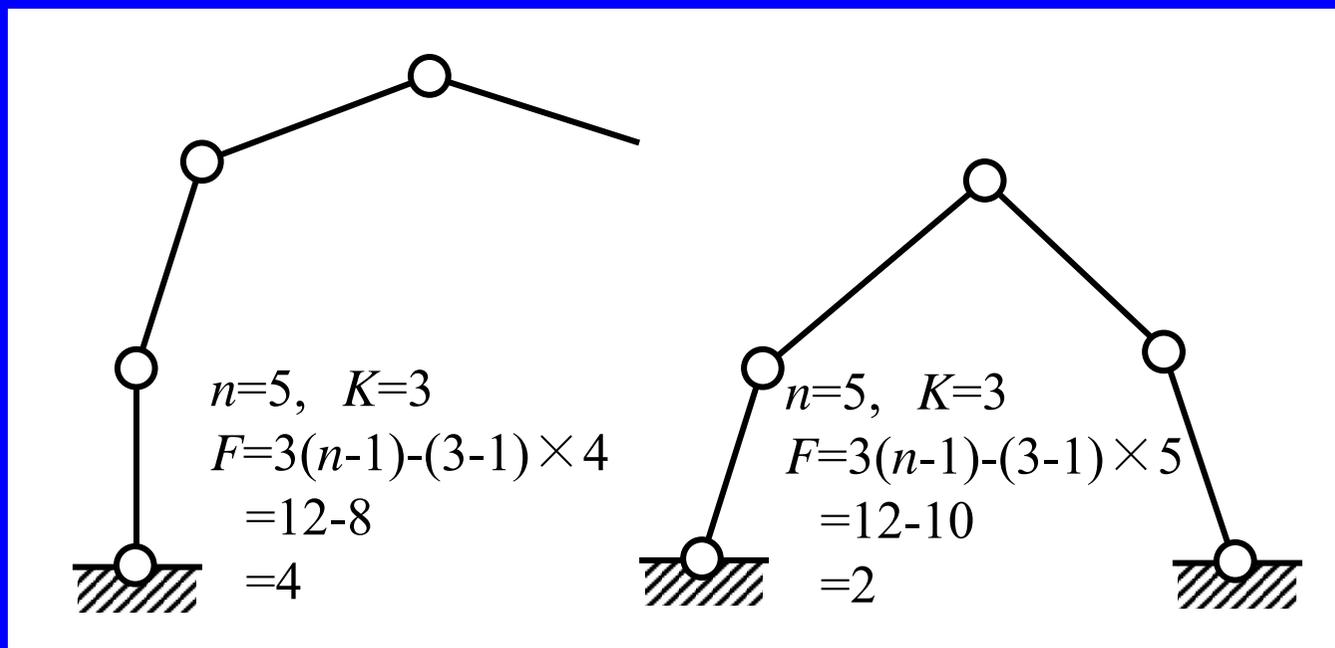
冗長性

障害物回避など
ができる

リンクと関節の構成方法(1)

・開リンク機構
一端が空中に開放

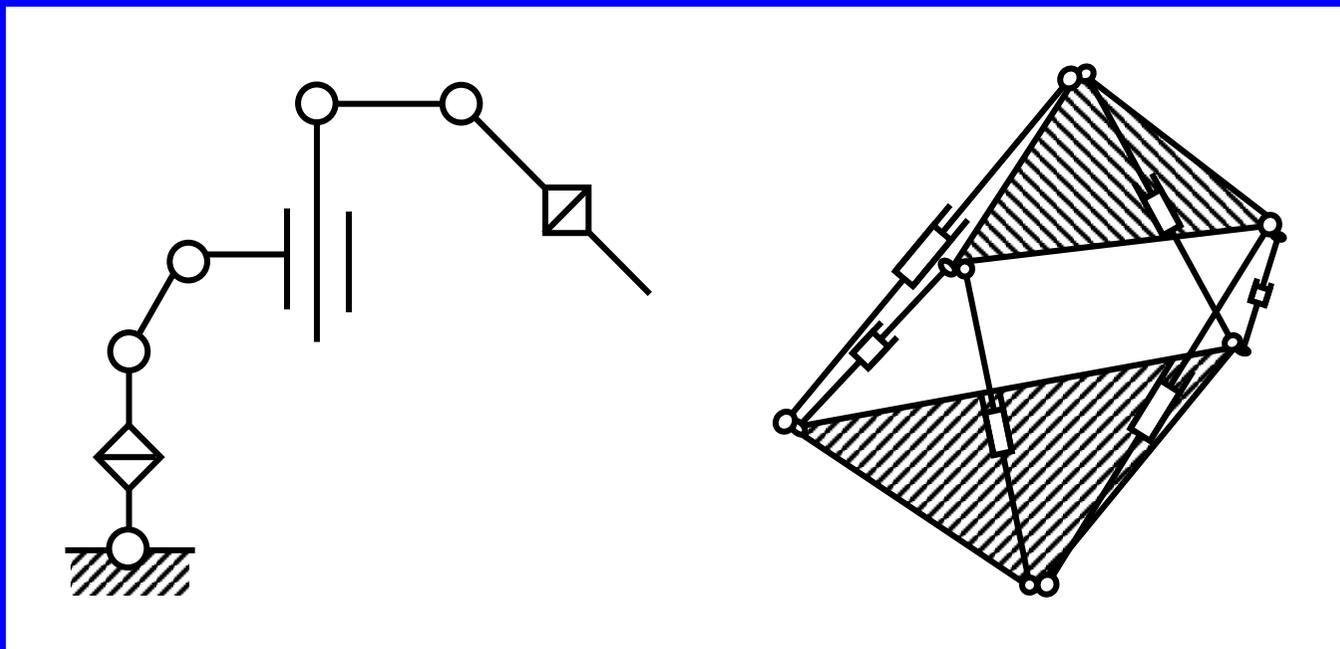
・閉リンク機構
両端が基礎に拘束



リンクと関節の構成方法(2)

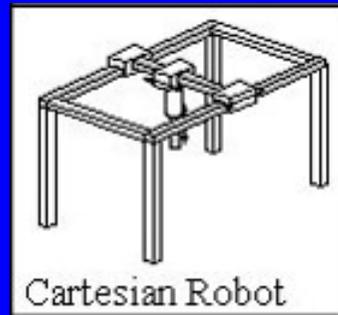
- ・直列リンク機構
関節が直列に接続

- ・並列リンク機構
関節が並列に接続

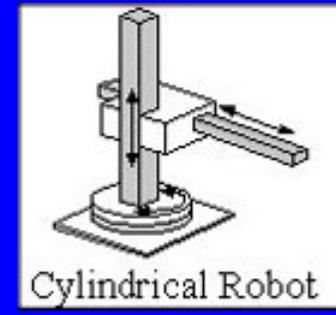


ロボットの分類（機械構造）

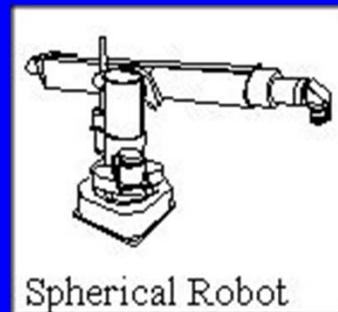
- 直交座標ロボット



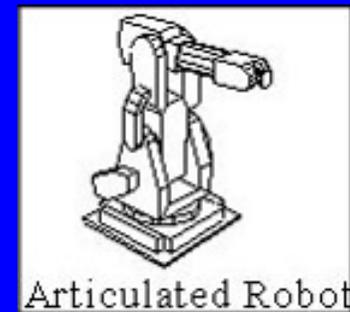
- 円筒座標ロボット



- 極座標ロボット



- 関節ロボット



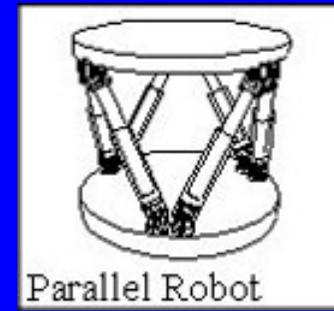
ロボットの分類（特殊形式）

- スカラロボット



腕の機械構造が、平行軸の回転ジョイントをもち、軸に直交する方向の剛性低い

- パラレルロボット



ベースとメカニカルインターフェースとの間の機械構造に複数の動力伝達経路をもつ

PTP制御とCP制御

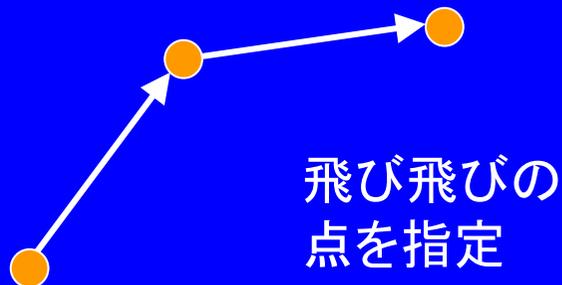
- 経路

空間における位置および姿勢の順序集合

- 軌道

時間をパラメータにとって表現した経路

PTP制御



CP制御



軌道生成

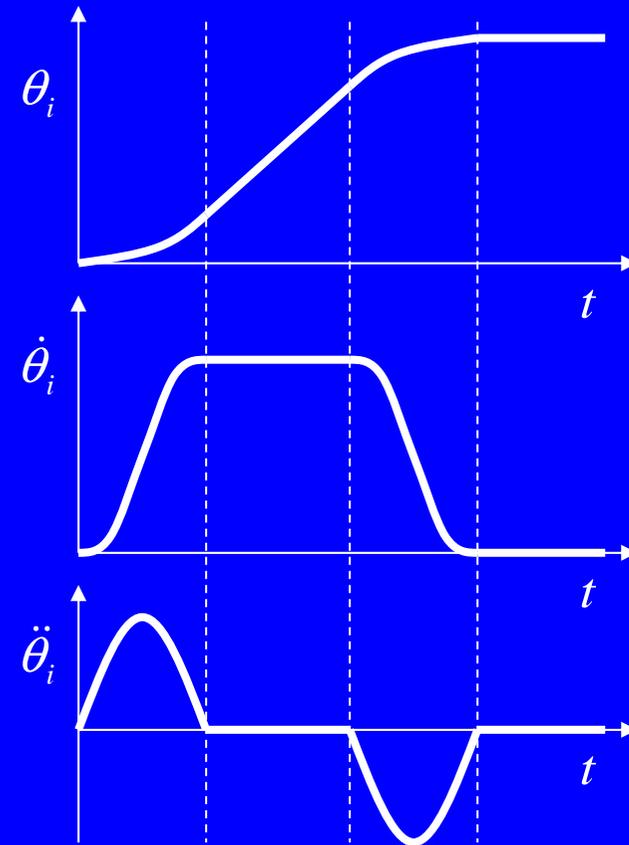
- ・初期状態、最終状態での角度・角速度・角加速度を指定し連続

⇒ $\theta_i(t)$ は t の5次の多項式

- ・初期状態、最終状態で静止、加減速時間は同じ

⇒ $\theta_i(t)$ は t の4次の多項式

- ・sin、cos を使うこともある



角速度に制限がある場合の例

運動学

幾何学的静特性

座標変換

順運動学

関節変位 q から手先の位置・姿勢 p を求める

$$p = f(q)$$

$$\dot{p} = J(q) \dot{q}$$

$$q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T \quad \dot{p} = \frac{dp}{dt}, \quad \dot{q} = \frac{dq}{dt}$$

$$p = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)^T$$

ヤコビ行列

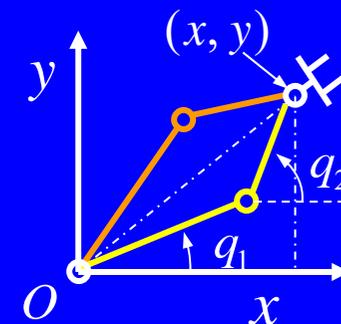
$$J(q) = \frac{\partial f(q)}{\partial q}$$

逆運動学

手先の位置・姿勢から関節変位を求める

$$q = f^{-1}(p)$$

解が求まらなかったり、
複数存在することもある



座標変換

剛体上の点P

$$\mathbf{p}_{XYZ} = [x \quad y \quad z]^T \quad O\text{-}XYZ$$

$$\mathbf{p}_{UVW} = [u \quad v \quad w]^T \quad O'\text{-}UVW$$

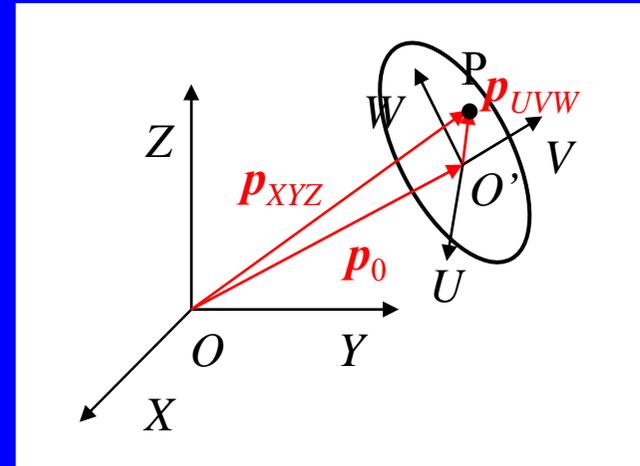
座標変換

$$\mathbf{p}_{XYZ} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{R} \mathbf{p}_{UVW}$$

並進と回転

回転行列 \mathbf{R} の意味

- ・ $O\text{-}XYZ$ に対する $O'\text{-}UVW$ の姿勢
- ・ $O'\text{-}UVW$ から $O\text{-}XYZ$ への座標変換
- ・ $O\text{-}XYZ$ におけるベクトルの回転



$$\mathbf{p}_0 = [x_0 \quad y_0 \quad z_0]^T$$

$$\mathbf{R} = [\mathbf{n} \quad \mathbf{s} \quad \mathbf{a}]$$

$\mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{a}$ は, U, V, W 軸
方向の単位ベクトル

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$$

回転行列

基本回転行列

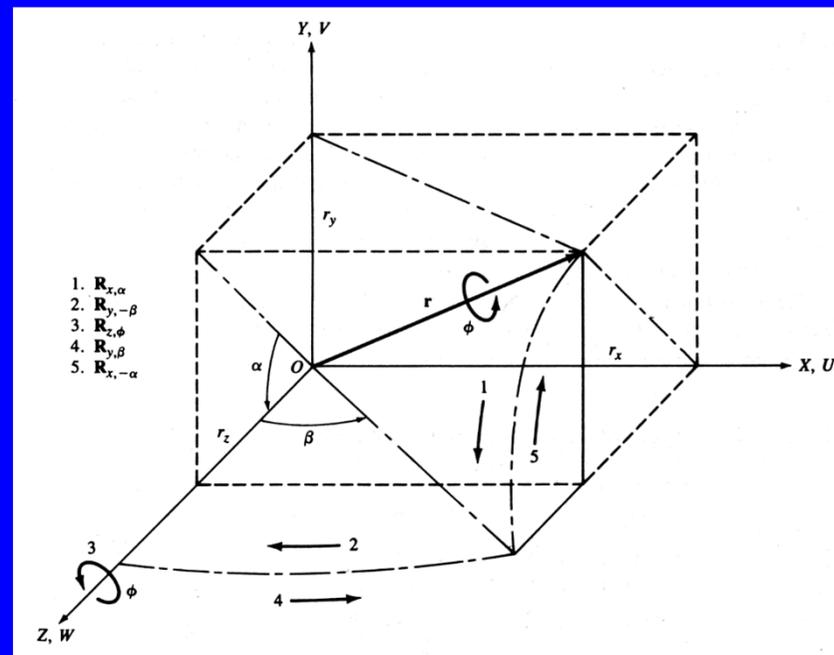
$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad R_y(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix}, \quad R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

合成回転行列

- ・初め座標系は一致しているとして、単位行列にとる
- ・現在の座標系 $O-UVW$ の主軸回りの回転の場合、
基本回転行列を右(後)からかける
- ・基本座標系 $O-XYZ$ の主軸回りの回転の場合、
基本回転行列を左(前)からかける

合成回転行列

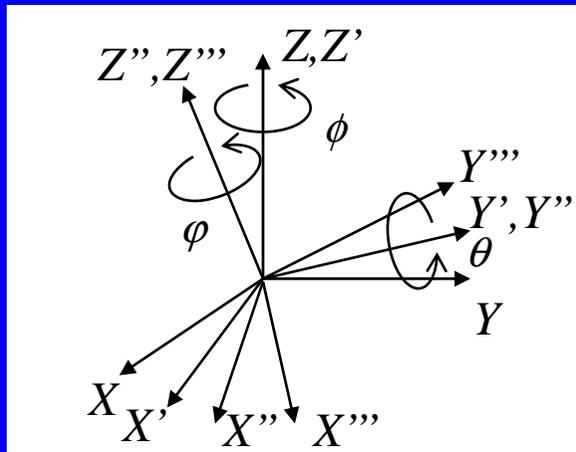
- 任意の軸回りの回転



$$R_r(\phi) = R_x(-\alpha)R_Y(\beta)R_Z(\phi)R_Y(-\beta)R_x(\alpha)$$

姿勢表現

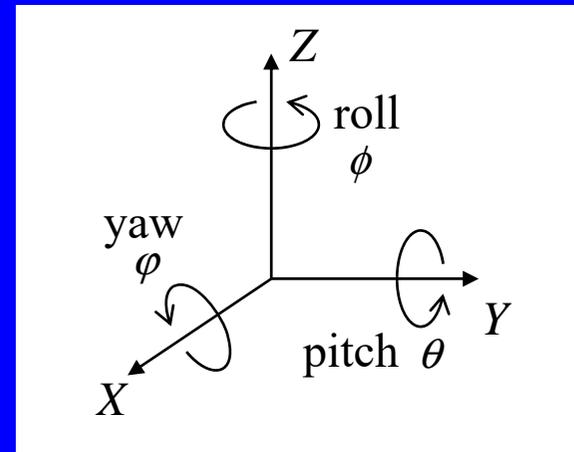
▪ Euler角



$$R(\phi, \theta, \varphi) = R_Z(\phi)R_Y(\theta)R_Z(\varphi)$$

1. Z 軸回り
2. Y' 軸回り
3. Z'' 軸回り

▪ roll-pitch-yaw



$$R(\phi, \theta, \varphi) = R_Z(\phi)R_Y(\theta)R_X(\varphi)$$

- | | |
|------------|------------|
| 1. Z 軸回り | 1. X 軸回り |
| 2. Y' 軸回り | = 2. Y 軸回り |
| 3. X'' 軸回り | 3. Z 軸回り |

同次座標

$$\mathbf{p}_{XYZ} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{R}\mathbf{p}_{UVW} \quad \longrightarrow \quad \tilde{\mathbf{p}}_{XYZ} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{p}}_{UVW}$$

・同次座標

$$\tilde{\mathbf{p}}_{XYZ} = [x \quad y \quad z \quad 1]^T$$
$$\tilde{\mathbf{p}}_{UVW} = [u \quad v \quad w \quad 1]^T$$

・同次変換行列

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{R} & & & \mathbf{p}_0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

連続する変換を表すのに便利

$$\tilde{\mathbf{p}}_{i-1} = {}^{i-1}\mathbf{T}_i \tilde{\mathbf{p}}_i, \quad (i=1, \dots, n) \text{ とすると}$$
$$\tilde{\mathbf{p}}_0 = {}^0\mathbf{T}_1 {}^1\mathbf{T}_2 \cdots {}^{n-1}\mathbf{T}_n \tilde{\mathbf{p}}_n = {}^0\mathbf{T}_n \tilde{\mathbf{p}}_n$$

Denavit-Hartenberg表現(1)

▪ 座標系の設定

1. ベースに近い方から順に $0, 1, \dots, n$ と番号付け
2. ベース座標系を z_0 軸が第1関節の軸方向となる任意の位置に設定
3. 各座標系を以下のように設定
 - 第 $i+1$ 関節で z_i 軸を設定
 - 原点 O_i は z_i と z_{i-1} の交点, または, z_{i-1} と z_i の共通法線と z_i の交点
 - $x_i = \pm z_{i-1} \times z_i$, または, z_{i-1} と z_i の共通法線方向
 - 右手系となるように y_i を設定
4. 第 n 座標系を x_n 軸が z_{n-1} 軸の法線となるような任意の位置に設定

Denavit-Hartenberg表現(2)

リンクパラメータ(幾何学的パラメータ)

$\theta_i \cdots x_{i-1}$ 軸から x_i 軸への z_{i-1} 軸まわりの角

$d_i \cdots O_{i-1}$ から H_i までの z_{i-1} 軸に沿った距離 (H_i は z_{i-1} 軸と x_i 軸の交点)

$a_i \cdots H_i$ から O_i までの x_i 軸に沿った距離

$\alpha_i \cdots z_{i-1}$ 軸から z_i 軸への x_i 軸まわりの角

回転関節: θ_i が変数

直動関節: d_i が変数

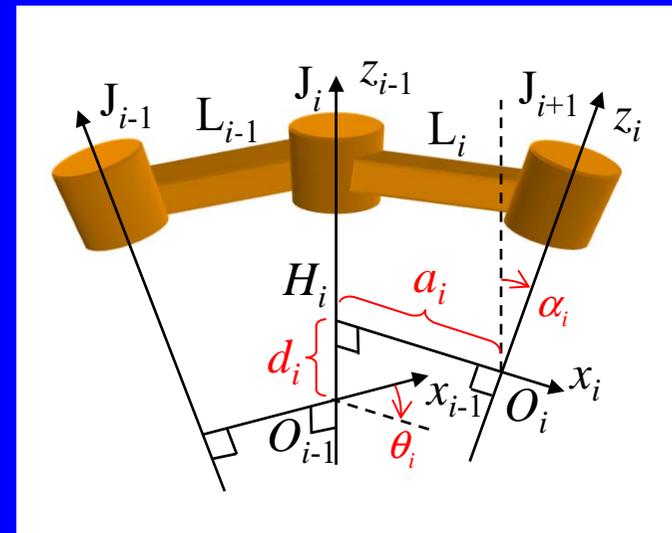
同次変換行列

$d_i \cdots$ リンク間距離

$a_i \cdot R_z(\theta_i)$ リンク長さ

$\alpha_i \cdots$ リンクのねじれ角

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} d_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_x(\alpha_i) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\tilde{p}_0 = {}^0T_1 T_2 \cdots {}^{n-1}T_n \quad \tilde{p}_n = {}^0T_n \tilde{p}_n$$

Denavit-Hartenberg表現(2)

リンクパラメータ(幾何学的パラメータ)

$\theta_i \cdots x_{i-1}$ 軸から x_i 軸への z_{i-1} 軸まわりの角

$d_i \cdots O_{i-1}$ から H_i までの z_{i-1} 軸に沿った距離 (H_i は z_{i-1} 軸と x_i 軸の交点)

$a_i \cdots H_i$ から O_i までの x_i 軸に沿った距離

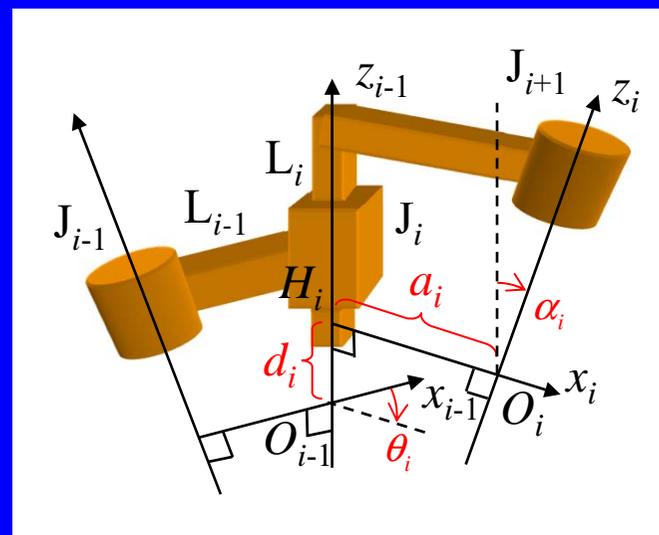
$\alpha_i \cdots z_{i-1}$ 軸から z_i 軸への x_i 軸まわりの角

回転関節: θ_i が変数

直動関節: d_i が変数

同次変換行列

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} R_z(\theta_i) & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hline 0 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_3 & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_i \end{bmatrix} \\ \hline 0 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_3 & \begin{bmatrix} a_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hline 0 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_x(\alpha_i) & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hline 0 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$



$$\tilde{p}_0 = {}^0T_1 T_2 \cdots {}^{n-1}T_n \quad \tilde{p}_n = {}^0T_n \tilde{p}_n$$

Denavit-Hartenberg表現(修正1)

ロボット工学の基礎, 川崎, 森北出版

▪ 座標系の設定

1. ベースに近い方から順に $0, 1, \dots, n$ と番号付け
2. ベース座標系は第1関節を適当な角度にした基準状態の第1座標系と一致
3. 各座標系を以下のように設定
 - 第 i 関節で z_i 軸を設定
 - x_i は z_i と z_{i+1} の共通法線方向, 原点 O_i は共通法線と z_i の交点
 - $z_i // z_{i+1}$ の場合, x_{i-1} と z_i の交点または O_{i+1} を通る共通法線
 - 右手系となるように y_i を設定
4. 第 n 座標系の x_n 軸は関節 n が基準角度の時に x_{n-1} 軸と同じ方向に設定

Denavit-Hartenberg表現(修正2)

ロボット工学の基礎, 川崎, 森北出版

リンクパラメータ(幾何学的パラメータ)

$\theta_i \cdots x_{i-1}$ 軸から x_i 軸への z_i 軸まわりの角

$d_i \cdots x_{i-1}$ 軸から x_i 軸までの z_i 軸に沿った距離

$a_i \cdots z_{i-1}$ 軸から z_i 軸までの x_{i-1} 軸に沿った距離

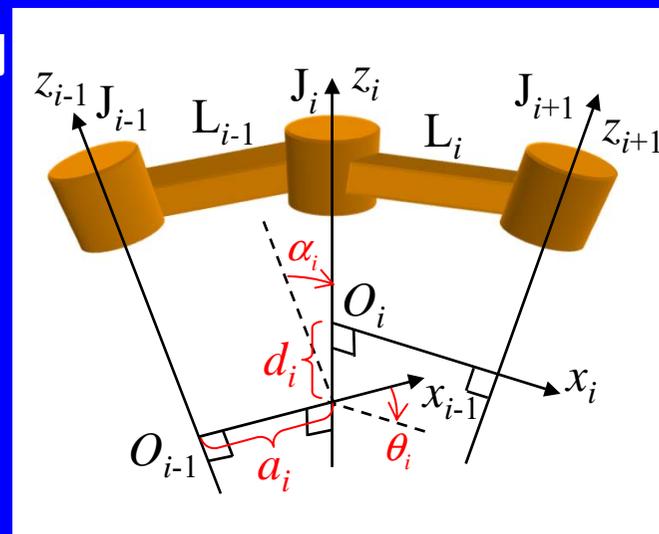
$\alpha_i \cdots z_{i-1}$ 軸から z_i 軸への x_{i-1} 軸まわりの角

回転関節: θ_i が変数

直動関節: d_i が変数

同次変換行列

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} I_3 & \begin{matrix} a_i \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_x(\alpha_i) & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_3 & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ d_i \end{matrix} \\ \hline 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_z(\theta_i) & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\tilde{p}_0 = {}^0T_1 T_2 \cdots {}^{n-1}T_n \quad \tilde{p}_n = {}^0T_n \tilde{p}_n$$

Denavit-Hartenberg表現(修正2)

ロボット工学の基礎, 川崎, 森北出版

リンクパラメータ(幾何学的パラメータ)

$\theta_i \cdots x_{i-1}$ 軸から x_i 軸への z_i 軸まわりの角

$d_i \cdots x_{i-1}$ 軸から x_i 軸までの z_i 軸に沿った距離

$a_i \cdots z_{i-1}$ 軸から z_i 軸までの x_{i-1} 軸に沿った距離

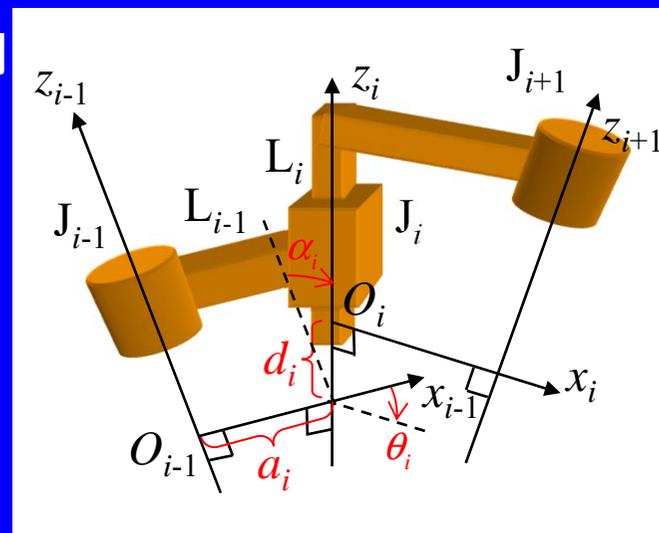
$\alpha_i \cdots z_{i-1}$ 軸から z_i 軸への x_{i-1} 軸まわりの角

回転関節: θ_i が変数

直動関節: d_i が変数

同次変換行列

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} I_3 & \begin{matrix} a_i \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_x(\alpha_i) & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_3 & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ d_i \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_z(\theta_i) & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\tilde{p}_0 = {}^0T_1 T_2 \cdots {}^{n-1}T_n \quad \tilde{p}_n = {}^0T_n \tilde{p}_n$$

マニピュレータのヤコビ行列

順運動学

$$p = f(q)$$

$$\dot{p} = J(q) \dot{q}$$

ヤコビ行列 $J(q) = \frac{\partial f(q)}{\partial q}$

関節変位

$$q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$$

回転関節: $q_i = \theta_i$, 直動関節: $q_i = d_i$

手先位置・姿勢

$$p = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)^T$$

$$\dot{p} = \frac{dp}{dt}, \dot{q} = \frac{dq}{dt}$$

力と関節トルク

$$\tau = J^T(q) f$$

関節駆動トルク $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)^T$

外力/トルク

$$f = (f_x, f_y, f_z, M_x, M_y, M_z)^T$$

∴ 仮想仕事の原理から $\delta W = f^T dp = \tau^T dq$
 $= f^T J(q) dq$

動力学

動特性

・順動力学

関節トルク/力 と初期条件から関節の変位, 速度, 加速度を求める

$$M(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) + g(q) + d(q, \dot{q}) = \tau$$

慣性力 コリオリ・遠心力 重力 摩擦力

・逆動力学

関節の変位, 速度, 加速度から関節トルク/力を求める

Lagrange法

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = u_i - \frac{\partial D_e}{\partial \dot{q}_i}$$

$L = K - P$.. ラグランジアン

$$K = \sum_{i=1}^n K_i, \quad K_i = \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_{gi}^T \mathbf{v}_{gi} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i$$

$$P = - \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{g}^T \mathbf{p}_{gi}$$



$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \\ &= \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \\ &= \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \underline{\dot{\mathbf{q}}}, \ddot{\mathbf{q}}) \mathbf{a} \end{aligned}$$

K .. 運動エネルギー

P .. 位置エネルギー

D_e .. 損失エネルギー
リンク i

\mathbf{p}_{gi} .. 重心の位置
ベクトル

\mathbf{v}_{gi} .. 重心の速度
ベクトル

$\boldsymbol{\omega}_i$.. 角速度ベクトル

m_i .. 質量

\mathbf{I}_i .. 慣性テンソル

\mathbf{g} .. 重力加速度
ベクトル

Lagrange法(1)

$$\dot{\mathbf{p}}_{gi} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{gi} \\ \boldsymbol{\omega}_i \end{bmatrix} = \mathbf{J}_i(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{Pi} \\ \mathbf{J}_{Oi} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \quad \text{とおくと}$$

$$\begin{aligned} K_i &= \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_{gi}^T \mathbf{v}_{gi} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i \\ &= \frac{1}{2} m_i (\mathbf{J}_{Pi} \dot{\mathbf{q}})^T (\mathbf{J}_{Pi} \dot{\mathbf{q}}) + \frac{1}{2} (\mathbf{J}_{Oi} \dot{\mathbf{q}})^T \mathbf{I}_i (\mathbf{J}_{Oi} \dot{\mathbf{q}}) \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left\{ m_i \mathbf{J}_{Pi}^T \mathbf{J}_{Pi} + \mathbf{J}_{Oi}^T \mathbf{I}_i \mathbf{J}_{Oi} \right\} \dot{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

よって

$$K = \sum_{i=1}^n K_i = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{M} = \sum_{i=1}^n (m_i \mathbf{J}_{Pi}^T \mathbf{J}_{Pi} + \mathbf{J}_{Oi}^T \mathbf{I}_i \mathbf{J}_{Oi})$$

$$P = - \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{g}^T \mathbf{p}_{gi}$$

Lagrange法(2)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial K}{\partial q} + \frac{\partial P}{\partial q} = \tau \quad (\text{損失無しの場合)より}$$

$$\frac{d}{dt} (M \dot{q}) - \frac{\partial K}{\partial q} + \frac{\partial P}{\partial q} = M \ddot{q} + \dot{M} \dot{q} - \frac{\partial K}{\partial q} + \frac{\partial P}{\partial q} = \tau$$

$$h(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q}) \dot{q} \quad g(q) \text{ とおく}$$

したがって

$$\begin{aligned} \tau &= M(q) \ddot{q} + h(q, \dot{q}) + g(q) \\ &= M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{M} - 2C &\text{ は歪対称行列} \\ \mathbf{x}^T (\dot{M} - 2C) \mathbf{x} &= 0 \end{aligned}$$

Lagrange法(3)

$$K = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}$$

$$h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial K}{\partial \mathbf{q}} = \dot{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \right)$$

ここで

$$\dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \right) \dot{q}_i = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{q}}$$

より

$$\dot{\mathbf{q}}^T h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{q}}$$

$$h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} \quad \text{とおくと}$$

$$\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left(\dot{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{q}} - 2h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T (\dot{\mathbf{M}} - 2C) \dot{\mathbf{q}} = 0$$

$\dot{\mathbf{M}} - 2C$ は歪対称行列

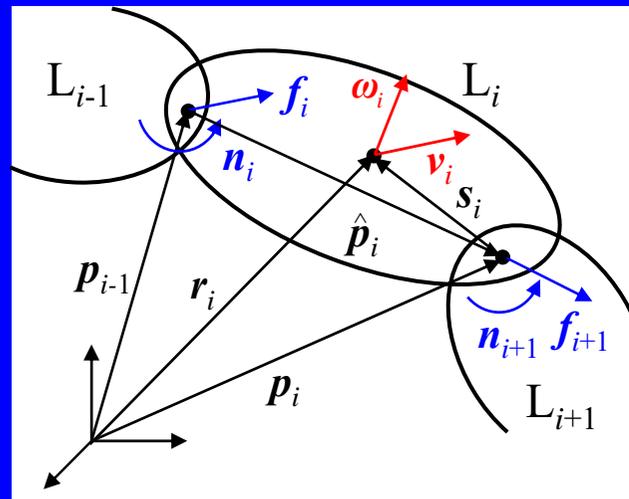
Newton-Euler法

$$F_i = \frac{d(m_i v_i)}{dt} = m_i a_i$$

$$N_i = \frac{d(I_i \omega_i)}{dt} = I_i \dot{\omega}_i + \omega_i \times (I_i \omega_i)$$

$$F_i = f_i - f_{i+1}$$

$$N_i = n_i - n_{i+1} + (p_{i-1} - r_i) \times f_i - (p_i - r_i) \times f_{i+1}$$



・繰り返しN-E法（逆動力学計算）

(1) 正順計算

ベースから手先に向かって、目標運動 q, \dot{q}, \ddot{q} から各リンクの角速度, 角加速度, 並進加速度を求める

(2) 逆順計算

手先からベースに向かって、関節駆動力/トルクを求める

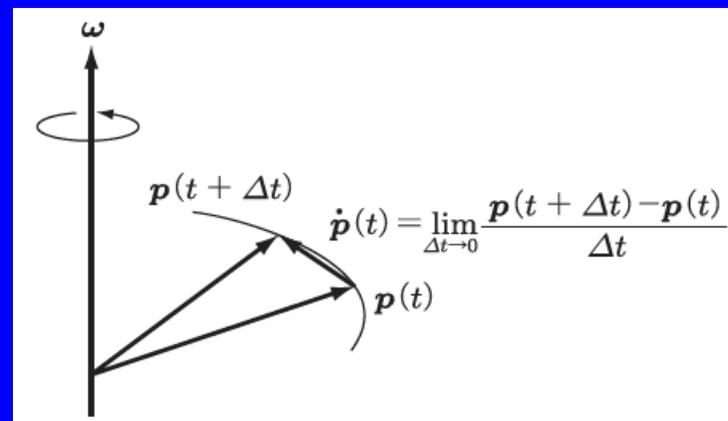
Newton-Euler法(準備1)

位置ベクトルの微分

位置 $p(t)$ が角速度 $\omega = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$ で回転

$$\dot{p}(t) = \omega \times p(t) = S(\omega)p(t)$$

$$S(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$



回転行列の微分

角速度 ${}^0\omega_A$ で回転する座標系 Σ_A

回転行列 ${}^0R_A = [{}^0x_A, {}^0y_A, {}^0z_A]^T$

$$\begin{aligned} {}^0\dot{R}_A &= [{}^0\dot{x}_A, {}^0\dot{y}_A, {}^0\dot{z}_A]^T = [{}^0\omega_A \times {}^0x_A, {}^0\omega_A \times {}^0y_A, {}^0\omega_A \times {}^0z_A]^T \\ &= S({}^0\omega_A)[{}^0x_A, {}^0y_A, {}^0z_A]^T \\ &= S({}^0\omega_A){}^0R_A \end{aligned}$$

Newton-Euler法(準備2)

並進・回転運動する座標系の関係

$${}^0\mathbf{p}_B = {}^0\mathbf{p}_A + {}^0\mathbf{p}_{BA}$$

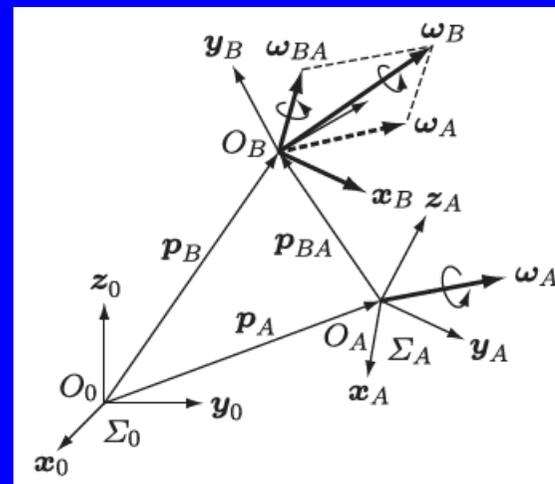
$$\begin{aligned} \frac{d{}^0\mathbf{p}_{BA}}{dt} &= \frac{d{}^0R_A^A \mathbf{p}_{BA}}{dt} = {}^0R_A^A \dot{\mathbf{p}}_{BA} + {}^0\dot{R}_A^A \mathbf{p}_{BA} \\ &= {}^0R_A^A \dot{\mathbf{p}}_{BA} + S({}^0\boldsymbol{\omega}_A) {}^0R_A^A \mathbf{p}_{BA} \\ &= {}^0R_A^A \dot{\mathbf{p}}_{BA} + {}^0\boldsymbol{\omega}_A \times ({}^0R_A^A \mathbf{p}_{BA}) \end{aligned}$$

$${}^0\dot{\mathbf{p}}_B = {}^0\dot{\mathbf{p}}_A + {}^0R_A^A \dot{\mathbf{p}}_{BA} + {}^0\boldsymbol{\omega}_A \times ({}^0R_A^A \mathbf{p}_{BA})$$

$${}^0\boldsymbol{\omega}_B = {}^0\boldsymbol{\omega}_A + {}^0\boldsymbol{\omega}_{BA} = {}^0\boldsymbol{\omega}_A + {}^0R_A^A \boldsymbol{\omega}_{BA} \quad {}^0\boldsymbol{\omega}_{BA} \text{ 相対角速度}$$

$$\begin{aligned} {}^0\ddot{\mathbf{p}}_B &= {}^0\ddot{\mathbf{p}}_A + {}^0R_A^A \ddot{\mathbf{p}}_{BA} + \underbrace{2{}^0\boldsymbol{\omega}_A \times ({}^0R_A^A \dot{\mathbf{p}}_{BA})}_{\text{コリオリの加速度}} \\ &\quad + \underbrace{{}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_A \times ({}^0R_A^A \mathbf{p}_{BA}) + {}^0\boldsymbol{\omega}_A \times [{}^0\boldsymbol{\omega}_A \times ({}^0R_A^A \mathbf{p}_{BA})]}_{\text{求心加速度}} \end{aligned}$$

$${}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_B = {}^0\dot{\boldsymbol{\omega}}_A + {}^0R_A^A \dot{\boldsymbol{\omega}}_{BA} + {}^0\boldsymbol{\omega}_A \times ({}^0R_A^A \boldsymbol{\omega}_{BA})$$



Newton-Euler法(1)

(0) 初期値 基準座標系表現

$$\omega_0 = \dot{\omega}_0 = v_0 = 0, \dot{v}_0 = g$$

(1) 正順計算 ($i=1, 2, \dots, n$)

$$\omega_i = \omega_{i-1} + \rho_i z_{i-1} \dot{q}_i$$

$$\dot{\omega}_i = \dot{\omega}_{i-1} + \rho_i [z_{i-1} \ddot{q}_i + \omega_{i-1} \times (z_{i-1} \dot{q}_i)]$$

$$\dot{v}_i = \dot{v}_{i-1} + \dot{\omega}_i \times \hat{p}_i + \omega_i \times (\omega_i \times \hat{p}_i) \quad \text{原点 } O_i \text{ の}$$

$$+(1 - \rho_i) [z_{i-1} \ddot{q}_i + 2\omega_{i-1} \times (z_{i-1} \dot{q}_i)] \quad \text{並進加速度}$$

$$a_i = \dot{v}_i + \dot{\omega}_i \times s_i + \omega_i \times (\omega_i \times s_i) \quad \text{重心の並進加速度}$$

(2) 逆順計算 ($i=n, n-1, \dots, 1$)

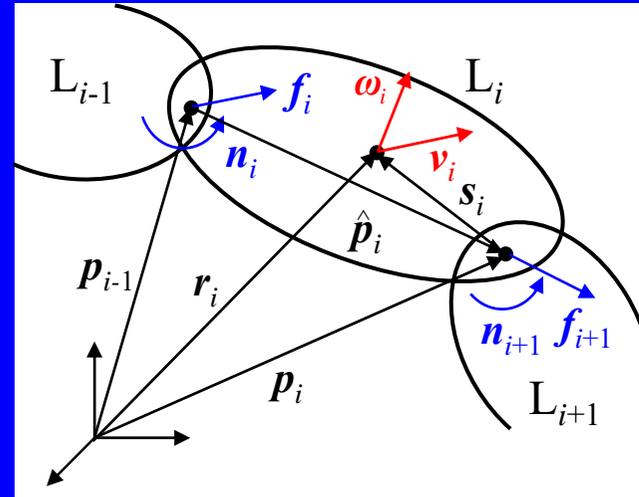
$$F_i = m_i a_i$$

$$N_i = I_i \dot{\omega}_i + \omega_i \times (I_i \omega_i)$$

$$f_i = F_i + f_{i+1} \quad (f_{n+1}, n_{n+1}: \text{外部から})$$

$$n_i = n_{i+1} + \hat{p}_i \times f_{i+1} + (\hat{p}_i + s_i) \times F_i + N_i$$

$$\tau_i = \begin{cases} n_i^T z_{i-1} + D_i \dot{q}_i & \text{回転のとき} \\ f_i^T z_{i-1} + D_i \dot{q}_i & \text{直動のとき} \end{cases}$$



$$\rho_i = \begin{cases} 1 & \text{関節 } i \text{ が回転のとき} \\ 0 & \text{関節 } i \text{ が直動のとき} \end{cases}$$

I_i が q の関数であり、
運動により変化する



リンク座標系で表した式に変換

Newton-Euler法(2)

(0) 初期値 **リンク座標系表現** (左肩の添え字は参照座標系を示す)

$${}^0\omega_0 = {}^0\dot{\omega}_0 = {}^0v_0 = 0, {}^0\dot{v}_0 = g$$

(1) 正順計算 ($i = 1, 2, \dots, n$)

$${}^i\omega_i = {}^iR_{i-1} {}^{i-1}\omega_{i-1} + \rho_i z_0 \dot{q}_i$$

$${}^i\dot{\omega}_i = {}^iR_{i-1} {}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} + \rho_i [z_0 \ddot{q}_i + {}^iR_{i-1} {}^{i-1}\omega_{i-1} \times (z_0 \dot{q}_i)]$$

$${}^i\dot{v}_i = {}^iR_{i-1} {}^{i-1}\dot{v}_{i-1} + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^i\hat{p}_i + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^i\hat{p}_i)$$

$$+ (1 - \rho_i) [z_0 \ddot{q}_i + 2 {}^i\omega_i \times (z_0 \dot{q}_i)]$$

$${}^i a_i = {}^i\dot{v}_i + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^i s_i + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^i s_i)$$

(2) 逆順計算 ($i = n, n-1, \dots, 1$)

$${}^i F_i = m_i {}^i a_i$$

$${}^i N_i = {}^i I_i {}^i \dot{\omega}_i + {}^i \omega_i \times ({}^i I_i {}^i \omega_i)$$

$${}^i f_i = {}^i F_i + {}^i R_{i+1} {}^{i+1} f_{i+1} \quad ({}^{n+1} f_{n+1}, {}^{n+1} n_{n+1}: \text{外部から})$$

$${}^i n_i = {}^i R_{i+1} {}^{i+1} n_{i+1} + {}^i \hat{p}_i \times {}^i R_{i+1} {}^{i+1} f_{i+1} + ({}^i \hat{p}_i + {}^i s_i) \times {}^i F_i + {}^i N_i$$

$$\tau_i = \begin{cases} {}^i n_i^T z_0 + D_i \dot{q}_i & \text{回転のとき} \\ {}^i f_i^T z_0 + D_i \dot{q}_i & \text{直動のとき} \end{cases}$$

$$\rho_i = \begin{cases} 1 & \text{関節}i\text{が回転のとき} \\ 0 & \text{関節}i\text{が直動のとき} \end{cases}$$

逐次同定

- **基底パラメータ**

運動方程式を決定するのに必要十分なパラメータの集合

$$M(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) + g(q) + d(q, \dot{q}) = \tau$$

- **逐次同定**

各軸1～2自由度の試験運動を順次行う

(1) 静止試験..一定トルクを与え, 重力と釣合せ, 静止させる

$$g(q) = \tau$$

(2) 運動試験..各関節を固定し, 各軸単独で重力補償 + 入力 τ を与える (q, \dot{q}, \ddot{q} が測定可なら, 最小2乗法などを用いる)

同時同定

- 同時同定

全関節を同時に運動させ、一挙に同定する

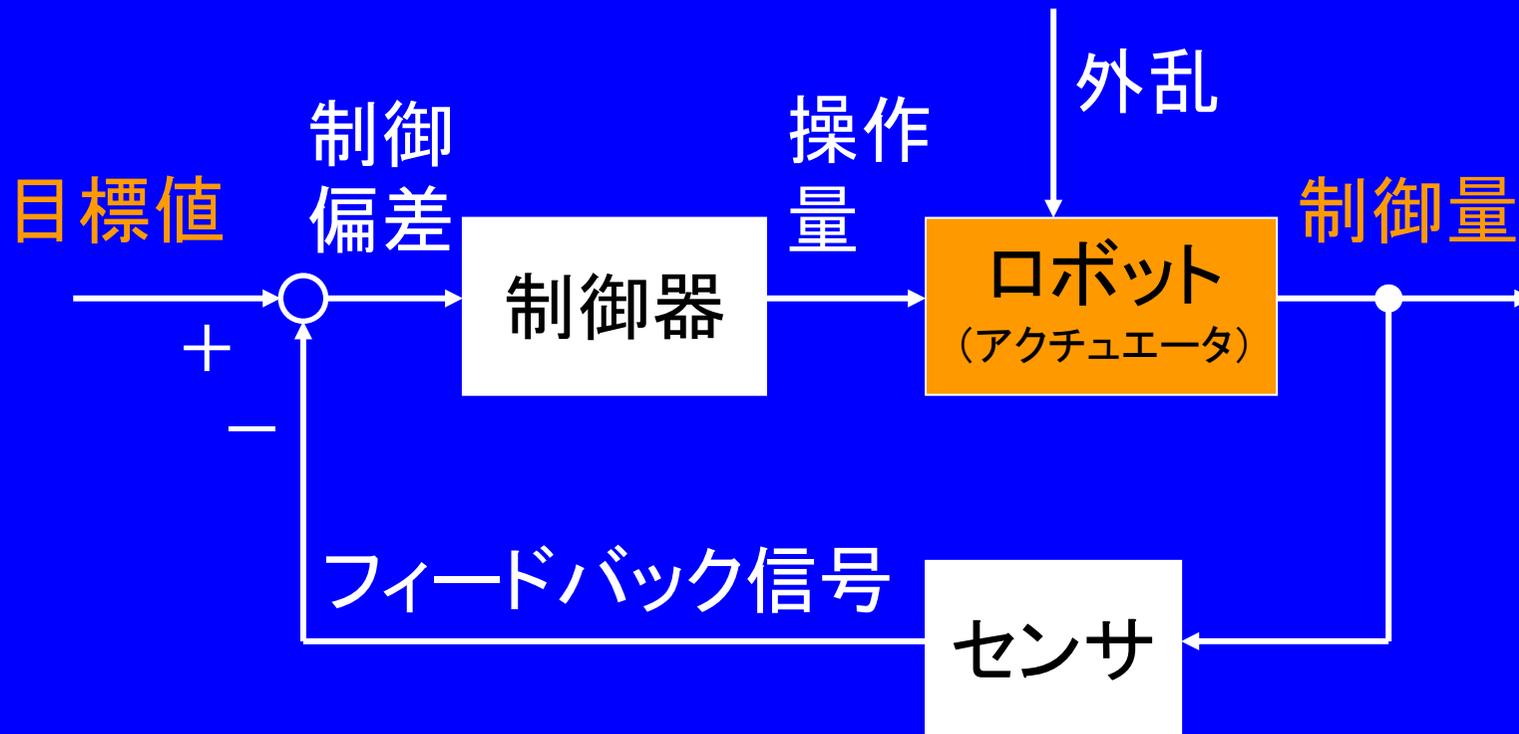
運動方程式 $\tau = \zeta(q, \dot{q}, \underline{\dot{q}}, \ddot{q})a$

パラメータ a に関して線形 $\zeta(q, \dot{q}, \underline{\dot{q}}, \ddot{q})$ は非線形関数

q, \dot{q}, \ddot{q} が測定可なら、いくつかの時刻で測定を行い、最小2乗法などを用いて一挙に推定

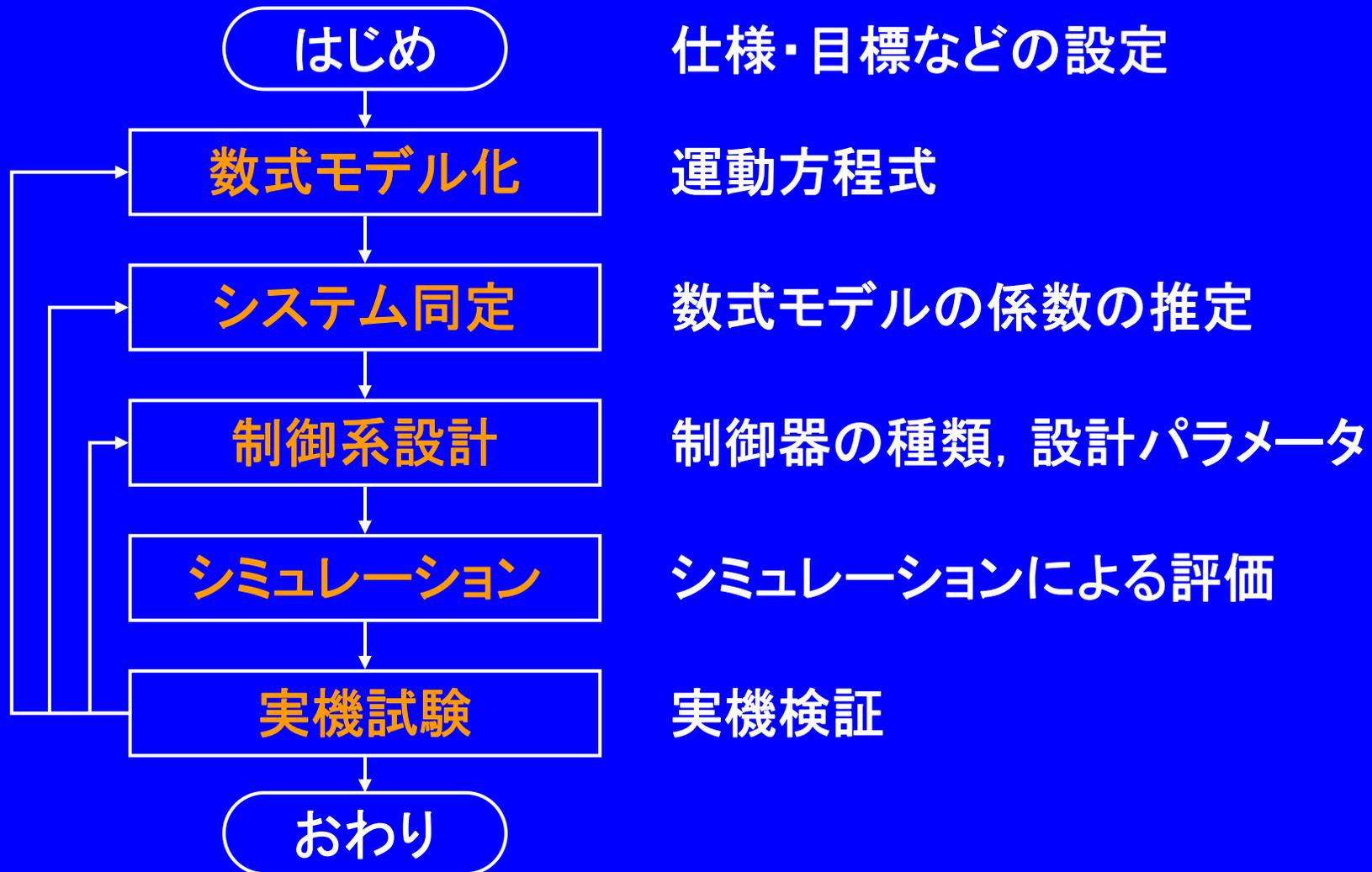
$$\hat{a} = (A^T A)^{-1} A^T y \quad \text{ここで} \quad A = \begin{bmatrix} \zeta(q(t_1), \dot{q}(t_1), \underline{\dot{q}}(t_1), \ddot{q}(t_1)) \\ \vdots \\ \zeta(q(t_n), \dot{q}(t_n), \underline{\dot{q}}(t_n), \ddot{q}(t_n)) \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} \tau(t_1) \\ \vdots \\ \tau(t_n) \end{bmatrix}$$

フィードバック制御



制御対象(ロボット)への入力を操作して、
制御量を目標値に合わせる

制御系の設計



いろいろな制御器

PID制御(比例+積分+微分)

状態フィードバック

計算トルク法

分解加速度制御

可変構造制御

適応制御

ロバスト制御

学習制御

: など